# Elemente de analiză matematică

Alina Ilinca Lazu

# Cuprins

# Capitolul 1

# Şiruri de numere reale

## 1.1 Definiţie. Şiruri mărginite. Şiruri monotone. Subşiruri ale unui şir.

**Definiţia 1.1.1** Se numeşte *şir de numere reale* o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Fie şirul de numere reale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, vom nota prin $x_n$ valoarea funcţiei $f$ în punctul $n$, adică

$$x_n = f(n), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Numerele $x_0, x_1, x_2, ...$ se numesc *termenii* şirului $f$, iar numărul $x_n$ se numeşte *termenul general* al şirului $f$. Vom nota şirul $f$ prin

$$x_0, x_1, x_2, ...$$

sau, pe scurt, $(x_n)_{n \geq 0}$.

**Observaţia 1.1.2** Dacă primii $k$ termeni, $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$, nu sunt definiţi, adică funcţia $f$ este definită pe mulţimea

$$\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N};\ n \geq k\} = \{k, k+1, k+2, ...\},$$

atunci vom nota şirul prin $(x_n)_{n \geq k}$.

**Exemplul 1.1.3** (1) Şirul numerelor naturale: $0, 1, 2, 3, ...$; termenul general al acestui şir este $x_n = n$.
(2) Şirul numerelor naturale pare: $0, 2, 4, 6, ...$; termenul său general este $x_n = 2n$.

(3) Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu termenul general $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar.} \end{cases}$
Termenii acestui şir sunt: $1, 0, 1, 0, ....$
(4) Fie $a, r \in \mathbb{R}$. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + r$, $n \geq 0$, $x_0 = a$, se numeşte *progresie aritmetică*. Din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin adăugarea raţiei $r$. Prin inducţie matematică se obţine formula termenului general al şirului:

$$x_n = a + nr, \ n \geq 0.$$

Suma primilor $n+1$ termeni ai şirului este:

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + ... + x_n = a + (a+r) + ... (a+nr) \\ &= (n+1)\, a + r\,(1 + 2 + ... + n) \\ &= (n+1)\, a + \frac{n\,(n+1)}{2} r = (n+1) \left(a + \frac{n}{2} r\right) \\ &= \frac{n+1}{2} (x_0 + x_n)\,. \end{aligned}$$

(5) Fie $b, q \in \mathbb{R}$. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n q$, $n \geq 0$, $x_0 = b$, se numeşte *progresie geometrică*. Prin inducţie matematică se obţine formula termenului general al şirului:

$$x_n = bq^n, \ n \geq 0.$$

Calculăm suma primilor $n+1$ termeni ai şirului. Avem

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + ... + x_n = b + bq + ... + bq^n \\ &= b\,(1 + q + ... + q^n)\,. \end{aligned}$$

Dacă $q \neq 1$, atunci $S_n = \dfrac{b\left(q^{n+1} - 1\right)}{q-1}$. Dacă $q = 1$, atunci $S_n = (n+1)\, b$.

### Şiruri mărginite

**Definiţia 1.1.4** Spunem că un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ este:
(i) *mărginit inferior* dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha \leq x_n, \ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N};$$

(ii) *mărginit superior* dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_n \leq \beta, \ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N};$$

(iii) *mărginit* dacă există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

**Observaţia 1.1.5** Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

**Definiţia 1.1.6** Spunem că un şir de numere reale este *nemărginit* dacă nu este mărginit.

**Observaţia 1.1.7** Un şir este nemărginit fie dacă nu este mărginit inferior, fie dacă nu este mărginit superior, fie dacă nu este mărginit nici inferior, nici superior.

**Exemplul 1.1.8** (1) Şirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, pentru că $|x_n| \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
(2) Şirul $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, este mărginit, pentru că $|x_n| = |\sin n| \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
(3) Şirul $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit, nefiind mărginit superior; însă este mărginit inferior, pentru că $0 \leq x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
(4) Şirul $x_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit, nefiind mărginit inferior; însă este mărginit superior, pentru că $x_n \leq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
(5) Şirul $x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$, este nemărginit , nefiind nici mărginit inferior, nici mărginit superior.

### Şiruri monotone

**Definiţia 1.1.9** Spunem că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este:
(i) *crescător* (*strict crescător*) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
(ii) *descrescător* (*strict descrescător*) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ (strict) crescător sau (strict) descrescător se numeşte şir (*strict*) *monoton*.

**Observaţia 1.1.10** Orice şir strict monoton este monoton, nu şi reciproc. De exemplu, orice şir constant este monoton (atât crescător cât şi descrescător), dar nu este strict monoton.

**Observaţia 1.1.11** Pentru a stabili monotonia unui şir, fie studiem semnul diferenţei $x_{n+1} - x_n$, fie comparăm raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi. Mai precis,
(a) dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ ($x_{n+1} - x_n > 0$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul

$(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător (respectiv strict crescător);
(b) dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ ($x_{n+1} - x_n < 0$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător (respectiv strict descrescător).
În cazul unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu termeni strict pozitivi,
(a) dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ ($\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător (respectiv strict crescător);
(b) dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ ($\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$), pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător (respectiv strict descrescător).

**Exemplul 1.1.12** (1) Şirul $x_n = 2n + 1$, $n \geq 0$, este strict crescător.
(2) Şirul $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, este strict descrescător.
(3) Şirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, nu este monoton.

**Observaţia 1.1.13** (i) Există şiruri mărginite, care nu sunt monotone. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.
(ii) Există şiruri care sunt monotone, dar nu sunt mărginite. De exemplu, şirul $x_n = 2n + 1$, $n \geq 0$. Totuşi,
(a) dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, atunci $x_0 \leq x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de $x_0$;
(b) dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, atunci $x_0 \geq x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior de $x_0$.

### Subşiruri ale unui şir

**Definiţia 1.1.14** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $(n_k)_{k\geq 0}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ se numeşte *subşir* al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

**Exemplul 1.1.15** Luând $n_k = 2k$, $k \geq 0$, se obţine subşirul $(x_{2k})_{k\geq 0}$ al termenilor de rang par şi pentru $n_k = 2k + 1$, $k \geq 0$, se obţine subşirul $(x_{2k+1})_{k\geq 0}$ al termenilor de rang impar. Pentru şirul

$$x_n = (-1)^n n, \; n \geq 0,$$

subşirul termenilor de rang par este $x_{2k} = 2k$, $k \geq 0$, iar subşirul termenilor de rang impar este $x_{2k+1} = -(2k + 1)$, $k \geq 0$.

**Exemplul 1.1.16** Fie şirul

$$x_n = \sin \frac{n\pi}{2}, \; n \geq 0.$$

Subşirurile $(x_{4k})_{k\geq 0}$, $(x_{4k+1})_{k\geq 0}$, $(x_{4k+2})_{k\geq 0}$, $(x_{4k+3})_{k\geq 0}$ sunt date de:

$$x_{4k} = \sin\frac{4k\pi}{2} = \sin 2k\pi = 0,\ k \geq 0,$$

$$x_{4k+1} = \sin\frac{(4k+1)\pi}{2} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ k \geq 0,$$

$$x_{4k+2} = \sin\frac{(4k+2)\pi}{2} = \sin(2k+1)\pi = 0,\ k \geq 0,$$

$$x_{4k+3} = \sin\frac{(4k+3)\pi}{2} = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ k \geq 0.$$

**Observaţia 1.1.17** Prin inducţie matematică se arată că $n_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, ştiind că $n_0 < n_1 < ... < n_k < ...$, avem $n_1 > n_0$ şi $n_0 \geq 0$, deci $n_1 \geq 1$. Presupunem că $n_p \geq p$ şi să arătăm că $n_{p+1} \geq p+1$. Cum $n_{p+1} > n_p \geq p$, rezultă că $n_{p+1} \geq p+1$.

## 1.2 Şiruri cu limită. Şiruri convergente.

**Definiţia 1.2.1** Se numeşte *vecinătate* a punctului $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subseteq \mathbb{R}$ care conţine un interval deschis centrat în $x$.

În acest caz există $r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subseteq V$.

**Exemplul 1.2.2** Mulţimile $(-2, 3)$, $[-1, 2)$, $\left(-\sqrt{2}, +\infty\right)$, $\mathbb{R}$ sunt vecinătăţi ale originii, deoarece conţin intervalul deschis $(-1, 1)$ centrat în origine. Mulţimea $\mathbb{Z}$ nu este vecinătate a originii pentru că nu conţine nici un interval de forma $(-r, r)$, cu $r > 0$.

**Observaţia 1.2.3** Intervalul deschis $(a, b)$, cu $a < b$, este vecinătate a oricărui punct al său; intervalul închis $[a, b]$ este vecinătate a oricărui punct $c \in (a, b)$, dar nu este vecinătate a punctelor $a$, $b$.

Considerăm mulţimea

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

cu relaţia de ordine (care prelungeşte relaţia de ordine din $\mathbb{R}$):

$$-\infty < +\infty,\ -\infty < x,\ x < +\infty,\ \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

**Definiţia 1.2.4** Se numeşte *vecinătate* a lui $+\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, +\infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.

**Definiţia 1.2.5** Se numeşte *vecinătate* a lui $-\infty$ orice mulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty, b)$, cu $b \in \mathbb{R}$.

**Definiţia 1.2.6** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $x$ dacă orice vecinătate a lui $x$ conţine toţi termenii şirului, exceptând, eventual, un număr finit de termeni.
Cu alte cuvinte, $x$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dacă:
(I) pentru orice vecinătate $V$ a lui $x$ există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$.
În acest caz vom nota

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ sau } x_n \to x.$$

**Definiţia 1.2.7** (i) Spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este *convergent* dacă are limită finită.
Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, atunci spunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la $x$.
(ii) Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numesc *divergente*.

**Exemplul 1.2.8** (1) Orice şir constant este convergent. Într-adevăr, fie şirul constant $x_n = a$, $n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ fixat. Orice vecinătate $V$ a lui $a$ conţine punctul $a$, deci, $x_n \in V$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge la $a$.
(2) Şirul $x_n = n^2$, $n \geq 0$, este divergent (are limita $+\infty$). Într-adevăr, fie $V$ o vecinătate oarecare a lui $+\infty$. Deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, +\infty] \subset V$. Observăm că, dacă $n^2 > \varepsilon$, atunci $n^2 \in V$. Prin urmare, luând $n_V = [\sqrt{\varepsilon}]+1$, rezultă că, pentru orice $n \geq n_V$, avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, sau $n^2 > \varepsilon$, deci $n^2 \in V$. În concluzie, toţi termenii şirului $x_n = n^2$ aparţin mulţimii $V$ de la un rang încolo, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Următoarele două teoreme ne dau caracterizări ale limitei unui şir, în cazul când limita este finită, respectiv, infinită.

**Teorema 1.2.9** *Şirul de numere reale* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent la* $x \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă:*
(II) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $n_\varepsilon$, *care depinde de* $\varepsilon$, *astfel încât* $|x_n - x| < \varepsilon$ *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$.

**Demonstraţie.** Presupunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la $x$. Cum mulţimile de forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$, sunt vecinătăţi ale punctului $x$, rezultă, conform Definiţiei 1.2.6, că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural $n_\varepsilon$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, adică $|x_n - x| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Reciproc, dacă (II) are loc, să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pentru aceasta, fie $V$ o vecinătate oarecare a punctului $x \in \mathbb{R}$. Deci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. Conform (II), există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Aceasta înseamnă că $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, adică $x_n \in V$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. ■

**Observaţia 1.2.10** Teorema 1.2.9 poate fi scrisă sub forma: şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul de numere reale pozitive $(|x_n - x|)_{n\geq 0}$ are limita zero.

**Teorema 1.2.11** *Fie* $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.
(i) *Şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $+\infty$ *dacă şi numai dacă:*
(III) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $n_\varepsilon$ *astfel încât* $x_n > \varepsilon$, *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$.
(ii) *Şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $-\infty$ *dacă şi numai dacă:*
(IV) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* $n_\varepsilon$ *astfel încât* $x_n < -\varepsilon$, *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$.

**Exemplul 1.2.12** Arătăm că şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, este convergent la 0, folosind condiţia (II) din Teorema 1.2.9. Fie $\varepsilon > 0$. Observăm că

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

conduce la $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Prin urmare, luând $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, obţinem că $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

**Exemplul 1.2.13** Arătăm că şirul $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, este convergent la 1, folosind condiţia (II) din Teorema 1.2.9. Fie $\varepsilon > 0$. Observăm că

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

revine la $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Prin urmare, luând $n_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, obţinem că $|x_n - 1| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

**Exemplul 1.2.14** Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=+\infty$, folosind condiţia (III) din Teorema 1.2.11. Fie $\varepsilon>0$. Observăm că $x_n=2n-1>\varepsilon$ dacă $n>\dfrac{\varepsilon+1}{2}$. Prin urmare, luând $n_\varepsilon=\left[\dfrac{\varepsilon+1}{2}\right]+1$, obţinem că $x_n>\varepsilon$ pentru orice $n\geq n_\varepsilon$.

### Proprietăţi ale şirurilor convergente

**Teorema 1.2.15** (unicitatea limitei). *Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.*

**Demonstraţie.** Presupunem, prin reducere la absurd, că există un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ care să aibă două limite diferite $x$ şi $y$. Atunci există o vecinătate $V$ a punctului $x$ şi o vecinătate $U$ a punctului $y$ astfel încât $V\cap U=\emptyset$. Deoarece $x_n\to x$, în vecinătatea $V$ a lui $x$ se află toţi termenii şirului, exceptând, eventual un număr finit de termeni. Prin urmare, în afara lui $V$, în particular, în $U$, vom avea doar un număr finit de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. În concluzie, $y$ nu poate fi limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. ∎

Aplicând Definiţia 1.2.6, se obţin uşor următoarele rezultate:

**Teorema 1.2.16** *Prin adăugarea sau prin eliminarea unui număr finit de termeni:*
(i) *un şir convergent rămâne convergent la aceeaşi limită;*
(ii) *un şir divergent rămâne divergent.*

**Teorema 1.2.17** *Prin schimbarea ordinii termenilor*
(i) *unui şir convergent, se obţine un şir convergent cu aceeaşi limită;*
(ii) *unui şir divergent, se obţine tot un şir divergent.*

### Proprietăţi ale subşirurilor

**Teorema 1.2.18** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $x\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ al său are, de asemenea, limita $x$.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 0}$. Cum $x_n\to x$, rezultă că pentru orice vecinătate $V$ a lui $x$ există un rang $n_V$ astfel încât $x_n\in V$, pentru orice $n\geq n_V$. Fie $k\geq n_V$. Aşa cum am văzut în Observaţia 1.1.17, $n_k\geq k\geq n_V$. În concluzie, $x_{n_k}\in V$, pentru orice $k\geq n_V$, adică $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. ∎

Prin urmare, orice subşir al unui şir convergent este şi el convergent.

**Corolarul 1.2.19** *Dacă un şir are un subşir divergent, atunci acel şir este divergent.*

**Exemplul 1.2.20** Şirul $x_n = (-1)^n n$, $n \geq 0$, este divergent întrucât subşirul $x_{2k} = 2k$ are limita $+\infty$.

**Corolarul 1.2.21** *Dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci şirul nu are limită.*

**Exemplul 1.2.22** Şirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, nu are limită întrucât subşirul $x_{2k} = 1$ are limita 1, iar subşirul $x_{2k+1} = -1$ are limita $-1$.

**Exemplul 1.2.23** Şirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$, $n \geq 0$, nu are limită întrucât subşirul $x_{4k} = 0$, pentru orice $k \geq 0$, deci are limita 0, iar subşirul $x_{4k+1} = 1$, pentru orice $k \geq 0$, deci are limita 1.

**Observaţia 1.2.24** Un şir divergent poate avea subşiruri convergente, cum este cazul şirurilor din exemplele precedente, sau poate să nu aibă nici un subşir convergent, cum este cazul şirului $x_n = n$, $n \geq 0$, al numerelor naturale.

### Convergenţă şi mărginire

**Teorema 1.2.25** *Orice şir convergent este mărginit.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale convergent la $x \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1$ astfel încât $|x_n - x| < 1$ pentru orice $n \geq n_1$. Rezultă că

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

Fie $M = \max \{|x_0|, |x_1|, ..., |x_{n_1 - 1}|, 1 + |x|\}$. Atunci avem $|x_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

**Corolarul 1.2.26** *Orice şir nemărginit este divergent.*

**Exemplul 1.2.27** Şirul $x_n = -n$, $n \geq 0$, este divergent întrucât nu este mărginit inferior.

**Observaţia 1.2.28** Reciproca Teoremei 1.2.25 nu este adevărată. Există şiruri mărginite, care nu sunt convergente. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, este mărginit, dar nu este convergent.

### Criterii de existenţă a limitei unui şir

**Teorema 1.2.29** (Criteriul majorării). *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale şi* $x\in\mathbb{R}$. *Dacă există un şir* $(\alpha_n)_n$ *de numere reale pozitive convergent la zero astfel încât*

$$|x_n - x| \leq \alpha_n, \text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}, \tag{1.1}$$

*atunci* $x_n \to x$.

**Demonstraţie.** Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $\alpha_n \to 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $\alpha_n < \varepsilon$. Dar atunci, din (1.1) avem că $|x_n - x| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $x_n \to x$. ■

**Exemplul 1.2.30** Fie şirul $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$, $n \geq 1$. Avem

$$\left|\frac{\cos n}{n} - 0\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, conform Criteriului majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

**Teorema 1.2.31** *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale.*
(i) *Dacă există un şir* $(a_n)_{n\geq 0}$ *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *şi* $x_n \geq a_n$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
(ii) *Dacă există un şir* $(b_n)_{n\geq 0}$ *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ *şi* $b_n \geq x_n$, *pentru orice* $n\in\mathbb{N}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Demonstraţie.** (i) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $a_n \to +\infty$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $a_n > \varepsilon$. Prin urmare şi $x_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică (III) are loc. Deci $x_n \to +\infty$.

(ii) Se arată în mod similar că este verificată condiţia (IV). ■

**Exemplul 1.2.32** Fie şirul $x_n = n + (-1)^n$, $n \geq 0$. Are loc inegalitatea:

$$x_n \geq n - 1, \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} (n-1) = +\infty$, rezultă că şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

### Operaţii cu şiruri cu limită

**Teorema 1.2.33** (operaţii cu şiruri convergente). *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri convergente,* $x_n \to x$, $y_n \to y$. *Atunci:*
(i) $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi* $x_n + y_n \to x + y$;
(ii) *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi* $\lambda x_n \to \lambda x$;
(iii) $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi* $x_n y_n \to xy$;
(iv) *dacă* $x_n \neq 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $x \neq 0$, *atunci* $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 0}$ *este convergent şi* $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{x}$;
(v) $(|x_n|)_{n\geq 0}$ *este convergent şi* $|x_n| \to |x|$.

**Demonstraţie.** (i) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $x_n \to x$ şi $y_n \to y$, există $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\begin{aligned} |x_n - x| &< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geq n_1 \text{ şi} \\ |y_n - y| &< \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geq n_2. \end{aligned}$$

Atunci, pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ avem:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon,$$

adică $x_n + y_n \to x + y$.

(ii) Dacă $\lambda = 0$, concluzia teoremei este evidentă. Să presupunem că $\lambda \neq 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Cum $x_n \to x$, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda|\,|x_n - x| < |\lambda|\,\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

adică $\lambda x_n \to \lambda x$.

(iii) Şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este mărginit (fiind convergent), deci există $M > 0$ astfel încât $|y_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Din relaţia $x_n y_n - xy = (x_n - x)\, y_n + x\,(y_n - y)$, rezultă că

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq |x_n - x|\,|y_n| + |x|\,|y_n - y| \\ &\leq |x_n - x|\, M + |x|\,|y_n - y|, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dar $|x_n - x| \to 0$ şi $|y_n - y| \to 0$ (întrucât $x_n \to x$ şi $y_n \to y$). Folosind (i) şi (ii) rezultă că $|x_n - x|\, M + |x|\,|y_n - y| \to 0$. Prin urmare, conform Criteriului majorării, $x_n y_n \to xy$.

(iv) Deoarece $x_n \to x$ şi $x \neq 0$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$, pentru orice $n \geq n_1$, de unde rezultă că $|x_n| \geq |x| - |x_n - x| > \frac{|x|}{2}$ pentru orice $n \geq n_1$. Pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \frac{1}{2}|x|^2 \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_2$. Atunci, pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, avem

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n|\,|x|} < \frac{1}{2}|x|^2 \varepsilon \frac{2}{|x|} \cdot \frac{1}{|x|} = \varepsilon.$$

Prin urmare, $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.

(v) Cum $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $|x_n - x| \to 0$, din Criteriul majorării rezultă că $|x_n| \to |x|$. ■

**Corolarul 1.2.34** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Atunci:*
(i) *$(x_n - y_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi $x_n - y_n \to x - y$;*
(ii) *dacă $y_n \neq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $y \neq 0$, atunci $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\geq 0}$ este convergent şi $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.*

**Propoziţia 1.2.35** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale, $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent la zero şi $(y_n)_{n\geq 0}$ mărginit. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

**Demonstraţie.** Fie $M > 0$ astfel încât $|y_n| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci avem $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| \leq M\,|x_n|$, care tinde la zero întrucât $x_n$ tinde la zero. Din Criteriul majorării rezultă că $x_n y_n \to 0$. ■

**Exemplul 1.2.36** Are loc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0,$$

deoarece şirul $x_n = \sin n$ este mărginit şi $y_n = \frac{1}{n}$ converge la 0.

**Teorema 1.2.37** (operaţii cu şiruri cu limita $+\infty$ sau $-\infty$). *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale.*
(i) *Dacă $x_n \to +\infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to +\infty$.*

(ii) *Dacă* $x_n \to -\infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
(iii) *Dacă* $x_n \to +\infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $x_n y_n \to +\infty$.
(iv) *Dacă* $x_n \to +\infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $x_n y_n \to -\infty$.

**Demonstraţie.** (i) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Dacă $x_n \to +\infty$ şi $y_n \to y$, cu $y \in \mathbb{R}$, atunci există $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > 2\varepsilon - y$, pentru orice $n \geq n_1$, şi $y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_2$. Prin urmare, pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ avem

$$x_n + y_n > (2\varepsilon - y) + (y - \varepsilon) = \varepsilon,$$

deci $x_n + y_n \to +\infty$. Dacă $x_n \to +\infty$ şi $y_n \to +\infty$, atunci există $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_1$, şi $y_n > \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_2$. Deci, pentru orice $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ avem

$$x_n + y_n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică $x_n + y_n \to +\infty$.

Celelalte afirmaţii se demonstrează în mod similar. ■

**Observaţia 1.2.38** Dacă $x_n \to +\infty$ şi $y_n \to -\infty$, în general nu se poate spune nimic despre şirul $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$. De asemenea, dacă $x_n \to +\infty$ şi $y_n \to 0$, în general nu se poate spune nimic despre şirul $(x_n y_n)_{n\geq 0}$. Le vom considera *cazuri exceptate.*

**Teorema 1.2.39** *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale.*
(i) *Dacă* $x_n \to +\infty$ *sau* $x_n \to -\infty$, *atunci* $\frac{1}{x_n} \to 0$.
(ii) *Dacă* $x_n \to 0$ *şi* $x_n > 0$ (*respectiv* $x_n < 0$ ) *de la un rang încolo, atunci* $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ (*respectiv* $\frac{1}{x_n} \to -\infty$ ).

**Demonstraţie.** (i) Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x_n \to +\infty$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. În particular, $x_n > 0$ şi $0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $\frac{1}{x_n} \to 0$. Dacă $x_n \to -\infty$, atunci $-x_n \to +\infty$ şi $\frac{1}{-x_n} \to 0$, deci $\frac{1}{x_n} \to 0$.

(ii) Presupunem că $x_n \to 0$ şi $x_n > 0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $0 < x_n < \frac{1}{\varepsilon}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, de unde rezultă că

$\dfrac{1}{x_n} > \varepsilon$, deci $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$. Dacă $x_n \to 0$ şi $x_n < 0$, atunci $-x_n \to 0$ şi $-x_n > 0$, deci $\dfrac{1}{-x_n} \to +\infty$, de unde $\dfrac{1}{x_n} \to -\infty$. ■

**Exemplul 1.2.40** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, pentru orice $k \geq 1$.

**Observaţia 1.2.41** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, nu putem să ne pronunţăm asupra naturii şirului $\dfrac{x_n}{y_n}$. Cazurile $\dfrac{0}{0}$ şi $\dfrac{\infty}{\infty}$ se numesc *cazuri exceptate.*

Următorul rezultat afirmă că inegalităţile se păstrează prin trecere la limită.

**Teorema 1.2.42** (trecerea la limită în inegalităţi). *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale, cu proprietăţile:*
(i) $x_n \leq y_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ *şi* $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$.
*Atunci* $x \leq y$.

**Demonstraţie.** Presupunem prin reducere la absurd că $y < x$. Atunci există $V_1$ o vecinătate a lui $y$ şi $V_2$ o vecinătate a lui $x$ astfel încât $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ şi $a < b$, pentru orice $a \in V_1$ şi orice $b \in V_2$. Deoarece $y_n \to y$, termenii şirului $(y_n)_{n\geq 0}$ se găsesc în $V_1$ de la un rang $n_1$ încolo. De asemenea, cum $x_n \to x$, termenii şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se găsesc în $V_2$ de la un rang $n_2$ încolo. Dacă $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, atunci $x_n \in V_2$ şi $y_n \in V_1$, deci $y_n < x_n$, ceea ce contrazice ipoteza (i). Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci $x \leq y$. ■

**Observaţia 1.2.43** Dacă între termenii celor două şiruri $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ are loc inegalitatea strictă $x_n < y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci, prin trecere la limită, putem obţine egalitate. De exemplu, şirurile $x_n = 1$ şi $y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, satisfac inegalitatea strictă $x_n < y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

### Teoreme fundamentale

**Teorema 1.2.44** (de convergenţă a şirurilor monotone).
(i) *Orice şir crescător şi mărginit superior este convergent.*
(ii) *Orice şir descrescător şi mărginit inferior este convergent.*
*Pe scurt, orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

**Demonstraţie.** (i) Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir crescător şi mărginit superior. Atunci există numărul real $\alpha = \sup_n x_n$ (axioma lui Cantor [14, pag. 23]). Pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, există un termen $x_{n_\varepsilon}$ al şirului astfel încât $x_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$. Deoarece şirul este crescător, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \geq x_{n_\varepsilon}$, deci

$$\alpha - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

de unde

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Astfel, condiţia (II) din Teorema 1.2.9 este verificată, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ converge la $\alpha$.

(ii) Se demonstrează similar, arătând că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ descrescător şi mărginit inferior converge la $\beta = \inf_n x_n$. ■

**Observaţia 1.2.45** (i) Un şir crescător şi mărginit converge la marginea lui superioară.
(ii) Un şir descrescător şi mărginit converge la marginea lui inferioară.

**Exemplul 1.2.46** Şirul $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$, $n \geq 1$, este mărginit (deoarece $0 \leq x_n \leq 3$, pentru orice $n \geq 1$) şi monoton crescător (deoarece $x_{n+1} - x_n \geq 0$, pentru orice $n \geq 1$), deci este şir convergent. Se verifică imediat că $x_n \to 2$.

**Exemplul 1.2.47** Şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, este strict crescător (întrucât

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \text{ pentru orice } n \geq 1)$$

şi mărginit superior (deoarece $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, pentru orice $k \geq 2$, deci

$$x_n \leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2).$$

Prin urmare el este convergent.

**Exemplul 1.2.48** Fie $(x_n)_{n\geq 0} : x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{1+x_n}$, $x_0 = 1$. Prin inducţie matematică se demonstrează că $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior. Avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} < 1,$$

deci $x_{n+1} < x_n$, adică $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. Conform Teoremei 1.2.44, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Atunci, trecând la limită în relaţia de recurenţă, avem $x = \dfrac{x^2}{1+x}$, de unde obţinem că $x = 0$.

**Exemplul 1.2.49** Fie $x_n = \dfrac{n^k}{a^n}$, unde $k \in \mathbb{N}$ şi $a > 1$. Observăm că

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} = \frac{n^k}{a^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a}$$

adică

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a}, \tag{1.2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k = 1$. Fie $\varepsilon = a-1 > 0$. Conform definiţiei limitei unui şir numeric, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, avem $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k - 1 < \varepsilon$, adică $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k < a$ sau $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \cdot \dfrac{1}{a} < 1$. Din relaţia (1.2) obţinem că $x_{n+1} < x_n$, pentru orice $n \geq n_0$, adică, exceptând eventual primii $n_0$ termeni, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. Cum termenii şirului sunt pozitivi, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior (de zero), rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Să aflăm în continuare limita sa. Notăm $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relaţia (1.2) obţinem că

$$x = x \cdot \frac{1}{a} \text{ sau } (a-1)\, x = 0,$$

deci $x = 0$. Am arătat că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $a > 1$.

**Observaţia 1.2.50** Există şiruri convergente care nu sunt monotone. De exemplu, şirul $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, converge la 0, dar nu e monoton (luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative).

**Teorema 1.2.51** (i) *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir crescător, nemărginit, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
(ii) *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir descrescător, nemărginit, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

**Demonstraţie.** (i) Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir crescător şi nemărginit. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, avem

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...,$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de $x_0$. Prin urmare, $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este mărginit superior (fiind nemărginit). Înseamnă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un termen al şirului $x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$. Dar, folosind din nou monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \varepsilon,$$

ceea ce spune că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Punctul (ii) se demonstrează în mod similar. ■

Din Teoremele 1.2.44 şi 1.2.51 obţinem:

**Corolarul 1.2.52** *Orice şir monoton de numere reale are limită (finită sau nu). Dacă şirul este mărginit, limita sa este finită, dacă şirul este nemărginit, limita sa este infinită.*

**Teorema 1.2.53** (Cantor). *Fie*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ...$$

*un şir descrescător de intervale închise şi mărginite ale lui* $\mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

*Atunci există* $c \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

**Demonstraţie.** Deoarece $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător şi mărginit superior de $b_1$, iar şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit inferior de $a_1$. Prin urmare, conform Teoremei 1.2.44, şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente şi notăm

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \text{ şi } \lim_{n\to\infty} b_n = c'.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Arătăm în continuare că $c \in [a_k, b_k]$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem

$$a_k \leq a_{k+p} \leq b_{k+p} \leq b_k. \tag{1.3}$$

Şirul $(a_{k+p})_{p\geq 1}$ (respectiv $(b_{k+p})_{p\geq 1}$) este şirul $(a_k)_{k\geq 1}$ (respectiv $(b_k)_{k\geq 1}$) din care s-au suprimat primii $k$ termeni, deci

$$\lim_{p\to\infty} a_{k+p} = \lim_{p\to\infty} b_{k+p} = c. \tag{1.4}$$

Trecând la limită pentru $p \to \infty$ în (1.3) şi folosind (1.4) rezultă că

$$a_k \leq c \leq b_k.$$

Prin urmare,

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Mai trebuie să arătăm că $c$ este unic determinat. Fie $d \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Rezultă că $a_n \leq d \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru $n \to \infty$, obţinem că $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq d \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, deci $d = c$. Demonstraţia este completă. ■

În această secţiune am arătat că orice şir convergent este mărginit (Teorema 1.2.25), iar reciproca nu este adevărată. Totuşi are loc următoarea afirmaţie mai slabă decât reciproca:

**Teorema 1.2.54** (Lema lui Cesàro). *Orice şir mărginit de numere reale conţine un subşir convergent.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit. Deci există $[a_1, b_1]$ astfel încât $x_n \in [a_1, b_1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Împărţim $[a_1, b_1]$ în două subintervale egale: $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Cel puţin unul din cele două intervale va conţine o infinitate de termeni ai şirului. Îl notăm pe acesta cu $[a_2, b_2]$. În acelaşi mod obţinem intervalul $[a_3, b_3]$, care conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Avem

$$[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1].$$

Prin recurenţă obţinem un şir de intervale închise şi mărginite, care conţin o infinitate de termeni ai şirului dat şi astfel încât

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ...,$$

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1), \; b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b_1 - a_1), ...$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1), ....$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Din Teorema lui Cantor rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Intervalul $[a_1, b_1]$ conţine toţi termenii şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Alegem un element $x_{n_1}$. Intervalul $[a_2, b_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Alegem $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ astfel încât $n_2 > n_1$. Procedând recurent, putem alege $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $n_k > n_{k-1}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Am obţinut astfel subşirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_k \leq c \leq b_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Dar $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$. Conform Criteriului majorării rezultă că $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, deci am găsit un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ convergent la $c$. ∎

Pentru şirurile nemărginite are loc următorul rezultat:

**Teorema 1.2.55** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*
(i) *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conţine un subşir cu limita $+\infty$.*
(ii) *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conţine un subşir cu limita $-\infty$.*

**Demonstraţie.** (i) Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, pentru orice număr $k \in \mathbb{N}$ există un termen al şirului $x_{n_k} > k$. Putem construi astfel un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi, deoarece $\lim\limits_{k\to\infty} k = +\infty$, rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$. Punctul (ii) al teoremei se deduce în mod asemănător. ∎

**Corolarul 1.2.56** *Din orice şir de numere reale se poate extrage un subşir cu limită. Dacă şirul este mărginit se poate extrage un subşir convergent.*

**Limite fundamentale**

a) Fie $q \in \mathbb{R}$ fixat şi $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă $q = 1$, atunci $x_n = 1 \to 1$, dacă $q > 1$, atunci putem scrie $q = 1 + a$, cu $a > 0$ şi $x_n = (1+a)^n \geq 1 + na$, deci $x_n \to +\infty$ (conform Teoremei 1.2.31). Dacă $q \leq -1$, atunci şirul $(q^n)_{n\geq 0}$ este divergent. Dacă $q \in (-1, 1)$, atunci $|x_n| = |q^n| = |q|^n$, $n \in \mathbb{N}$. Şirul modulelor $(|x_n|)_{n\geq 0}$ este mărginit ($0 \leq |x_n| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$) şi descrescător ($\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |q| < 1$, $n \in \mathbb{N}$), deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$. Trecând la limită în relaţia $|x_{n+1}| = |q|\,|x_n|$ se obţine $l = |q|\, l$, deci $l = 0$. Prin urmare, şirul $(q^n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1]$. În plus, avem

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ pentru } q \in (-1,1) \\ 1, \text{ pentru } q = 1 \\ +\infty, \text{ pentru } q > 1 \\ \text{nu există, pentru } q \leq -1. \end{cases}$$

b) Fie $k \geq 1$ un număr natural şi $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$. Considerăm şirul $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$, $n \geq 0$. Putem scrie

$$x_n = n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right),\ n \geq 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = ... = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, conform Teoremei 1.2.33, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right) = a_k$. Prin urmare, conform Teoremei 1.2.37,

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } a_k > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a_k < 0. \end{cases}$$

Observăm că

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0\right) = \lim_{n\to\infty} a_k n^k,$$

(limita este dată de limita termenului de grad maxim, $a_k n^k$,) şi este $+\infty$ sau $-\infty$, după cum coeficientul $a_k$ este pozitiv sau negativ.

c) Fie $k, m \geq 1$ două numere naturale şi considerăm şirul

$$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + ... + b_1 n + b_0},$$

unde $a_0, a_1, ..., a_k, b_0, b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$. Scriem

$$x_n = \frac{n^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}\right)}{n^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}\right)}.$$

Dacă $m = k$, atunci, deoarece cele două paranteze tind către $a_k$, respectiv către $b_k$, când $n \to \infty$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_k}{b_k},$$

adică limita este egală cu raportul coeficienţilor de grad maxim.
Dacă $m > k$, atunci

$$x_n = \frac{1}{n^{m-k}} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot \frac{a_k}{b_m} = 0.$$

Dacă $m < k$, atunci

$$x_n = n^{k-m} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + ... + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \cdot \frac{a_k}{b_m}.$$

În concluzie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + ... + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m > k \\ +\infty, \text{ dacă } m < k \text{ şi } a_k b_m > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } m < k \text{ şi } a_k b_m < 0 \\ \frac{a_k}{b_k}, \text{ dacă } m = k. \end{cases}$$

**Exemplul 1.2.57**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 1}{3n^3 + 2n + 5} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{-3n + 2} = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 1}{n^4 - 1} = 0.$$

## Alte criterii de existenţă a limitei unui şir

Următoarea teoremă ne permite să calculăm limita unui şir care poate fi încadrat între alte două şiruri având aceeaşi limită.

**Teorema 1.2.58** (”a cleştelui”).
*Fie* $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}, (z_n)_{n\geq 0}$ *trei şiruri de numere reale, cu proprietăţile:*
(i) $x_n \leq y_n \leq z_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$.
*Atunci există* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

**Demonstraţie.** Presupunem mai întâi că $a \in \mathbb{R}$. Din proprietatea (i) rezultă că $|y_n - x_n| \leq z_n - x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dar şirul $(z_n - x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, conform Corolarului 1.2.34, şi $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = a - a = 0$. Aplicând Criteriului majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, deci şirul $y_n = (y_n - x_n) + x_n$ este convergent la $0 + a = a$.

Dacă $a = +\infty$ sau $a = -\infty$, atunci se aplică Teorema 1.2.31. ■

**Corolarul 1.2.59** *Dacă* $0 \leq x_n \leq a_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *şi* $a_n \to 0$, *atunci* $x_n \to 0$.

**Exemplul 1.2.60** Şirul $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ are limita 0, pentru că $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$, pentru orice $n \geq 1$ şi $\dfrac{1}{n} \to 0$.

**Exemplul 1.2.61** Fie şirul cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \ n \geq 1.$$

Atunci avem

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \ n \geq 1,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

**Teorema 1.2.62** (Criteriul lui Stolz-Cesàro). *Fie două şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *astfel încât* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este strict monoton şi nemărginit. Dacă există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

*atunci există şi limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ *şi este egală cu* $l$, *adică*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

**Demonstraţie.** Să presupunem că $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci, conform ipotezei, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

adică

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n+1} - y_n),$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Dând lui $n$ valori de la $n_\varepsilon$ la $n_\varepsilon + p - 1$ şi adunând inegalităţile membru cu membru, obţinem:

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n_\varepsilon+p} - y_{n_\varepsilon}) < x_{n_\varepsilon+p} - x_{n_\varepsilon} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{n_\varepsilon+p} - y_{n_\varepsilon}),$$

de unde

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}} + \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}}\right) < \frac{x_{n_\varepsilon+p}}{y_{n_\varepsilon+p}} < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}} + \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}}\right).$$

Deoarece

$$\lim_{p\to\infty} \left( \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}} + \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}}\right) \right) = l - \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$\lim_{p\to\infty} \left( \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}} + \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}}\right) \right) = l + \frac{\varepsilon}{2},$$

rezultă că există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - l \right| < \varepsilon,$$

adică $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Dacă $l = +\infty$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 2\varepsilon.$$

De aici rezultă că

$$2\varepsilon\,(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n,$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Dând valori lui $n$ de la $n_\varepsilon$ la $n_\varepsilon + p - 1$, apoi adunând inegalităţile membru cu membru obţinem:

$$2\varepsilon\,(y_{n_\varepsilon+p} - y_{n_\varepsilon}) < x_{n_\varepsilon+p} - x_{n_\varepsilon},$$

adică,

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}} + 2\varepsilon\left(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n_\varepsilon+p}}\right) < \frac{x_{n_\varepsilon+p}}{y_{n_\varepsilon+p}}.$$

Întrucât membrul stâng al inegalităţii are limita $2\varepsilon$ când $p \to \infty$, înseamnă că există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq N_\varepsilon$,

$$\varepsilon < \frac{x_n}{y_n},$$

prin urmare, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Cazul $l = -\infty$ se demonstrează analog. ■

**Exerciţiul 1.2.63** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

*Rezolvare*. Fie $x_n = \ln n$ şi $y_n = n$, $n \geq 1$. Observăm că $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton şi nemărginit. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0.$$

Prin urmare, conform Criteriului lui Stolz-Cesàro, există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

**Exerciţiul 1.2.64** Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n},\ a > 0.$$

*Rezolvare*. Fie $x_n = a^n$ şi $y_n = n$, $n \geq 1$. Evident, şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict monoton şi nemărginit. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} - a^n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} a^n(a-1) = (a-1)\lim_{n\to\infty} a^n.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a \in [0,1) \\ 1, \text{ dacă } a = 1 \\ +\infty, \text{ dacă } a \in (1,+\infty), \end{cases}$$

obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a \in [0,1) \\ 0, \text{ dacă } a = 1 \\ +\infty, \text{ dacă } a \in (1,+\infty). \end{cases}$$

În concluzie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a \in [0,1] \\ +\infty, \text{ dacă } a \in (1,+\infty). \end{cases}$$

**Exerciţiul 1.2.65** Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu limita $a$. Arătaţi că şirul mediilor aritmetice

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

are limita $a$.
*Rezolvare*. Fie $x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ şi $y_n = n$, $n \geq 1$. Aplicând Criteriul lui Stolz-Cesàro şirului $b_n = \dfrac{x_n}{y_n}$, obţinem

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} - (a_1 + a_2 + ... + a_n)}{n+1-n} \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a. \end{aligned}$$

**Teorema 1.2.66** (Criteriul lui Cauchy-D'Alembert). *Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

*Atunci există şi limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ şi este egală cu $l$.*

**Demonstraţie.** Fie $a_n = \sqrt[n]{x_n} = (x_n)^{\frac{1}{n}}$ , $n \geq 1$. Atunci,

$$\ln a_n = \frac{1}{n} \ln x_n = \frac{\ln x_n}{n}.$$

Pentru a aplica Criteriul lui Stolz-Cesàro calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_{n+1} - \ln x_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ln l.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln l$, de unde, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. ■

**Exerciţiul 1.2.67** Fie şirul cu termeni strict pozitivi $(a_n)_{n\geq 1}$ cu limita $a$. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Aplicăm Criteriul lui Cauchy-D'Alembert pentru şirul

$$x_n = a_1 a_2 ... a_n,\ n \geq 1.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a,$$

prin urmare şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a$.

**Exerciţiul 1.2.68** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Fie $x_n = n$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

conform Criteriului lui Cauchy-D'Alembert, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**Exerciţiul 1.2.69** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ \text{pentru orice } a > 0.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Fie $x_n = a$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a} = 1,$$

conform Criteriului lui Cauchy-D'Alembert, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**Propoziţia 1.2.70** *Şirul*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \geq 1,$$

*este strict crescător şi mărginit, deci convergent.*

**Demonstraţie.** Avem

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}} \\
&= \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Folosind inegalitatea lui Bernoulli,

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \tag{1.5}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obţinem că

$$\begin{aligned}
\frac{e_{n+1}}{e_n} &> \left(1 - \frac{n+1}{n^2 + 2n + 1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{n^2 + n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Prin urmare, $e_{n+1} > e_n$, deci şirul $(e_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

Considerăm şirul

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ n \geq 1.$$

Avem

$$
\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+2}\cdot\dfrac{n}{n+1}}{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Folosind din nou inegalitatea lui Bernoulli obţinem

$$
\begin{aligned}
\frac{x_n}{x_{n+1}} &> \left(1+\frac{n+2}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{n(n+2)}\cdot\frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, $x_n > x_{n+1}$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Să mai observăm că $e_n < x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi avem

$$2 = e_1 \leq e_n < x_n \leq x_1 = 4,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde rezultă că şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Conform Teoremei 1.2.44, şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este convergent. ∎

**Observaţia 1.2.71** Limita şirului $(e_n)_{n\geq 1}$ se notează cu $e$ şi se numeşte *numărul lui Euler*. Numărul $e$ este iraţional, de aceea valoarea sa nu poate fi dată cu un număr finit de zecimale sau cu perioadă. O valoare aproximativă este $e \simeq 2,718281828459$.

**Propoziţia 1.2.72** *Şirul*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n \geq 1,$$

*este strict descrescător şi mărginit. Limita sa este $e$.*

**Demonstraţie.** Am arătat în demonstraţia Propoziţiei 1.2.70 că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Folosind inegalitatea (1.5) cu $x = \dfrac{1}{n-1}$, obţinem

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n-1} = 2+\frac{1}{n-1},\ \text{pentru orice } n \geq 2,$$

deci

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2+\frac{1}{n} > 2,\ \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

adică şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior.

Ţinând seama că

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e_n\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Observaţia 1.2.73** Putem scrie inegalităţile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

care, prin logaritmare, conduc la

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**Propoziţia 1.2.74** *Şirul*

$$E_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

*este strict crescător şi mărginit. Limita sa este e.*

**Demonstraţie.** Să observăm mai întâi că

$$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

deci şirul $(E_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Ţinând cont că, pentru orice $k \geq 2$ natural, avem $k! \geq 2^{k-1}$, deci $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, obţinem

$$E_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(E_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Prin urmare, $(E_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent. Fie $E$ limita sa. Vom arăta că $E = e$. Pentru aceasta vom folosi formula binomului lui Newton pentru $e_n$, anume

$$
\begin{aligned}
e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + ... + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^{k-1}} \\
&< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = E_n,\ n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Deci, $e_n < E_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită obţinem

$$e \leq E.$$

Pe de altă parte,

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

şi, pentru orice $k \geq 2$ fixat şi pentru orice $n > k$, avem

$$e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = ... = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$, trecând la limită pentru $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus, rezultă că

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{k!} = E_k,$$

pentru orice $k \geq 2$ fixat. Făcând acum $k \to \infty$, obţinem

$$e \geq \lim_{k\to\infty} E_k = E.$$

În concluzie $E = e$, adică

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Demonstraţia este încheiată. ■

**Propoziţia 1.2.75** *Şirul*

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \geq 1,$$

*este strict descrescător şi mărginit, deci convergent.*

**Demonstraţie.** Am arătat mai sus că au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \tag{1.6}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < 1 \\ \frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}. \end{gathered}$$

Sumând membru cu membru aceste inegalităţi obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7}$$

Ţinând cont de expresia termenului general $c_n$, inegalităţile (1.7) devin:

$$c_{n+1} - 1 + \ln(n+1) < \ln(n+1) < c_n + \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Din prima inegalitate obţinem că $c_{n+1} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar din a doua inegalitate obţinem că

$$c_n > \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Pentru a stabili monotonia acestui şir calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi, anume:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

iar din prima parte a inegalităţii (1.6) rezultă că

$$c_{n+1} - c_n < 0,\ n \in \mathbb{N}^*,$$

adică şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător. Fiind monoton şi mărginit, şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent. ■

**Observaţia 1.2.76** Limita şirului $(c_n)_{n\geq 0}$ se notează cu $c$ şi se numeşte *constanta lui Euler*. O valoare aproximativă a numărului $c$ este $c \simeq 0,577216$.

**Exerciţiul 1.2.77** Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Avem

$$\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln n} = \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n} + 1 = \frac{c_n}{\ln n} + 1, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este convergent la $c$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\ln n} = 0.$$

## 1.3 Şiruri fundamentale (Cauchy)

**Definiţia 1.3.1** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$, să avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Presupunând, fără a restrânge generalitatea, că $m \geq n$, putem scrie $m = n + p$, cu $p \in \mathbb{N}$. Atunci, Definiţia 1.3.1 se poate scrie sub forma echivalentă:

**Definiţia 1.3.2** Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$, să avem $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Intuitiv, într-un şir Cauchy, toţi termenii şirului sunt apropiaţi unul de celălalt de la un rang încolo.

**Teorema 1.3.3** *Orice şir Cauchy este mărginit.*

**Demonstraţie.** Conform Definiţiei 1.3.1, pentru $\varepsilon = 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n, m \geq n_1$, avem $|x_n - x_m| < 1$. În particular, $|x_n - x_{n_1}| < 1$. Rezultă că

$$|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|, \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

Fie $M = \max\{|x_0|, |x_1|, ..., |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}|\}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

**Teorema 1.3.4** *Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale, convergent la $x$. Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x_n \to x$, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Fie $m, n \geq n_\varepsilon$. Atunci, $|x_m - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $|x_n - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Deci,

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \varepsilon,$$

ceea ce ne spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy.

Reciproc, să presupunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy şi să arătăm că este convergent. Din Teorema 1.3.3 rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deci, conform Lemei lui Cesàro, are un subşir convergent, notat $(x_{n_k})_{k\geq 0}$. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita sa. Să demonstrăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $\varepsilon > 0$. Conform Definiţiei 1.3.1, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pe de altă parte, deoarece $x_{n_k} \to x$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $k \geq k_\varepsilon$, avem $|x_{n_k} - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Fie $\overline{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$ şi $k \geq \overline{n}_\varepsilon$. Atunci, $n_k \geq k \geq \overline{n}_\varepsilon$. Prin urmare, pentru orice $n \geq \overline{n}_\varepsilon$,

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $x$. ■

**Exerciţiul 1.3.5** Să se arate că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2},\ n \geq 1,$$

este şir Cauchy, deci convergent.
*Rezolvare*. Fie

$$x_{n+p} = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2},$$

unde $p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Revenind la inegalitatea de mai sus, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

adică $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci este convergent.

**Exerciţiul 1.3.6** Să se arate că şirul

$$x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + ... + \frac{\sin nx}{2^n},\ n \geq 1,\ x \in \mathbb{R},$$

este şir Cauchy.
*Rezolvare*. Fie

$$x_{n+p} = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + ... + \frac{\sin nx}{2^n} + \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}},$$

unde $p \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{2^p} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci convergent.

**Exerciţiul 1.3.7** Să se arate că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

nu este şir Cauchy, deci nu este convergent.
*Rezolvare*. Avem

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} \\ &> \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dacă $p > n$. Prin urmare, oricare ar fi rangul $n$ există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| > \dfrac{1}{2}$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este şir Cauchy, deci este un şir divergent.

## 1.4 Puncte limită ale unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

**Definiţia 1.4.1** Numim *mulţimea punctelor limită* ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ mulţimea formată din toate limitele în $\overline{\mathbb{R}}$ ale subşirurilor lui $(x_n)_{n\geq 0}$.

Vom nota cu $A$ această mulţime, deci

$$A = \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}};\ \text{există } (x_{n_k})_{k\geq 0} \text{ subşir al lui } (x_n)_{n\geq 0} \text{ cu } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \right\}.$$

**Observaţia 1.4.2** Mulţimea $A$ este nevidă. Într-adevăr, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, conform Lemei lui Cesàro, el conţine un subşir convergent; fie $l$ limita sa. Atunci, $l \in A$. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $+\infty \in A$, iar dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $-\infty \in A$, conform Teoremei 1.2.55.

**Exemplul 1.4.3** Fie şirul $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$. Mulţimea punctelor sale limită este $A = \{-1, 1\}$.

**Observaţia 1.4.4** Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $l$, finită sau nu, atunci $l \in A$, un subşir convergent la $l$ fiind chiar şirul $(x_n)_{n\geq 0}$.

**Observaţia 1.4.5** Există şiruri care au o infinitate de puncte limită. Este cazul şirului

$$0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, ..., 0, 1, 2, 3, ..., n, ....$$

Orice număr natural este punct limită al acestui şir, deoarece, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, există un subşir constant ai cărui termeni sunt egali cu $p$. De asemenea, $+\infty$ este punct limită al şirului, pentru că şirul numerelor naturale este un subşir al acestui şir.

**Teorema 1.4.6** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $A$ mulţimea punctelor sale limită. Atunci $l \in A$ dacă şi numai dacă orice vecinătate a sa conţine o infinitate de termeni ai şirului.*

**Demonstraţie.** Dacă $l \in A$, rezultă că există un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ cu limita $l$. Înseamnă că, în orice vecinătate a lui $l$ se află toţi termenii subşirului $(x_{n_k})_{k\geq 0}$, cu excepţia unui număr finit dintre ei, adică o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Reciproc, să presupunem că orice vecinătate a lui $l$ conţine o infinitate de termeni ai şirului. Construim un subşir $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ care tinde la $l$. Să presupunem mai întâi că $l \in \mathbb{R}$. În vecinătatea $V_1 = (l-1, l+1)$ a lui $l$ se află o infinitate de termeni ai şirului; fie $x_{n_1}$ unul dintre aceştia. Avem $|x_{n_1} - l| < 1$. În vecinătatea $V_2 = \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right)$ se află o infinitate de termeni ai şirului; fie $x_{n_2}$ unul dintre aceştia, cu $n_2 > n_1$. Avem $|x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$. Să presupunem că am ales un termen $x_{n_p}$ în vecinătatea $V_p = \left(l - \frac{1}{p}, l + \frac{1}{p}\right)$. În vecinătatea $V_{p+1} = \left(l - \frac{1}{p+1}, l + \frac{1}{p+1}\right)$ se află o infinitate de termeni ai şirului; alegem în $V_{p+1}$ un termen $x_{n_{p+1}}$ cu $n_{p+1} > n_p$. Avem $\left|x_{n_{p+1}} - l\right| < \frac{1}{p+1}$. Aşadar, prin inducţie matematică, putem alege un şir de numere naturale $(n_k)_{k\geq 0}$, strict crescător, astfel încât

$$|x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Atunci $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ este un subşir al şirului iniţial şi, din $(1.8)$, folosind Teorema 1.2.29, rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

Prin urmare $l \in A$. Dacă $l = +\infty$ se aleg vecinătăţile $V_p = (p, +\infty]$ ale lui $+\infty$ şi se procedează ca mai sus. Dacă $l = -\infty$, se aleg vecinătăţile $V_p = [-\infty, -p)$. ■

**Teorema 1.4.7** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $A$ mulţimea punctelor sale limită. Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $A$ este formată dintr-un singur element.*

**Demonstraţie.** Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $l$. Prin urmare, orice subşir al său are de asemenea limita $l$, deci $A = \{l\}$. Reciproc, să presupunem că $A$ conţine un singur element, notat $l$, şi fie $V$ o vecinătate arbitrară a lui $l$. Dacă în afara vecinătăţii $V$ se află o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, atunci putem extrage un subşir din aceşti termeni cu limita $l'$ diferită de $l$ (întrucât subşirul nu se află în $V$). Deci $l' \in A$, ceea ce contrazice presupunerea că $A$ conţine un singur element. Prin urmare, în afara lui $V$ se găseşte doar un număr finit de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, adică $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. ■

**Observaţia 1.4.8** Se demonstrează că pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) şi un cel mai mare punct limită (finit sau infinit).

**Definiţia 1.4.9** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.
(i) Numim *limită superioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\limsup_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, cel mai mare punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.
(ii) Numim *limită inferioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\liminf_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ cel mai mic punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Notând cu $A$ mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, avem:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &= \max A, \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &= \min A. \end{aligned}$$

**Observaţia 1.4.10** Este clar că $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

**Exerciţiul 1.4.11** Să se determine limitele superioară şi inferioară ale şirului

$$x_n = \cos\frac{n\pi}{2},\ n \geq 0.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Observăm că

$$x_{4k} = \cos\frac{4k\pi}{2} = \cos 2k\pi = 1,\ k \in \mathbb{N},\ \text{deci } \lim_{k\to\infty} x_{4k} = 1,$$

$$\begin{aligned} x_{4k+1} &= \cos\left(\frac{4k\pi+\pi}{2}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ k \in \mathbb{N},\ \text{deci } \lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{4k+2} &= \cos\left(\frac{4k\pi+2\pi}{2}\right) = \cos\left(2k\pi + \pi\right) \\ &= \cos\pi = -1,\ k \in \mathbb{N},\ \text{deci } \lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = -1, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{4k+3} &= \cos\left(\frac{4k\pi + 3\pi}{2}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\
&= \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \ k \in \mathbb{N}, \text{ deci } \lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = 0.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, $A = \{-1, 0, 1\}$. Rezultă că $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, iar $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

**Exerciţiul 1.4.12** Să se determine limitele superioară şi inferioară ale şirului

$$x_n = (-1)^{n+1}\, n^{(-1)^n}, \ n \geq 0.$$

Rezolvare. Observăm că

$$
\begin{aligned}
x_{2k} &= -2k, \ k \in \mathbb{N}, \text{ deci } \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -\infty, \\
x_{2k+1} &= \frac{1}{2k+1}, \ k \in \mathbb{N}, \text{ deci } \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} \to 0.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, $A = \{-\infty, 0\}$. Rezultă că $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, iar $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

**Teorema 1.4.13** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. În această situaţie,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

**Demonstraţie.** Conform Teoremei 1.4.7, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă mulţimea $A$ a punctelor sale limită conţine un singur element, ceea ce înseamnă că $\min A = \max A$. ■

**Observaţia 1.4.14** Şirurile din Exerciţiile 1.4.11, 1.4.12 nu au limită întrucât $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \neq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

# Capitolul 2

# Serii de numere reale

## 2.1 Serii convergente. Serii divergente

### 2.1.1 Definiţii şi exemple

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.

**Definiţia 2.1.1** Cuplul format din şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(S_n)_{n\geq 0}$, unde

$$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

se numeşte *serie de termen general* $x_n$.

Vom nota această serie prin unul din simbolurile

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ sau } \sum_{n\geq 0} x_n.$$

Elementele şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se numesc *termenii* seriei, iar şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *şirul sumelor parţiale* ataşat seriei cu termenul general $x_n$.

**Observaţia 2.1.2** Dacă primii $k$ termeni $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ lipsesc (nu sunt definiţi), vom nota seria de termen general $x_n$ prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n \text{ sau } \sum_{n\geq k} x_n$$

şi, în acest caz, $S_n = x_k + ... + x_n$, pentru orice $n \geq k$. Dăm ca exemple seriile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}.$$

**Definiţia 2.1.3** (i) Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, adică există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. În această situaţie, $S$ se numeşte *suma seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi notăm

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S.$$

(ii) Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent.

**Observaţia 2.1.4** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă şi notăm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$; dacă $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă şi notăm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = -\infty$.

**Exemplul 2.1.5** Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$, se numeşte *seria geometrică* cu raţia $q$. Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$, iar şirul sumelor parţiale are termenul general

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + q + q^2 + ... + q^n \\ &= \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ pentru } q \neq 1 \\ n+1, \text{ pentru } q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dacă $q = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, deci seria este divergentă. În cazul când $q \neq 1$, şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $\left(q^{n+1}\right)_{n\geq 0}$ este convergent, iar acest lucru se întâmplă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } |q| < 1.$$

În concluzie, seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. În acest caz, suma ei este $\dfrac{1}{1-q}$ şi notăm

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } |q| < 1.$$

**Exemplul 2.1.6** Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ are termenul general $x_n=(-1)^n$, iar şirul sumelor parţiale este dat prin

$$\begin{aligned} S_n &= 1+(-1)+...+(-1)^{n-1}+(-1)^n \\ &= \begin{cases} 1, & \text{pentru } n \text{ par} \\ 0, & \text{pentru } n \text{ impar,} \end{cases} \end{aligned}$$

deci şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ nu are limită. În concluzie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă.

**Exemplul 2.1.7** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ se numeşte *seria armonică*. Termenul general al acestei serii este $x_n=\frac{1}{n}$, iar şirul sumelor parţiale are termenul general

$$S_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}.$$

Am arătat în Capitolul 1, Exerciţiul 1.3.7, că şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy, deci este şir divergent. Prin urmare, seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

**Exemplul 2.1.8** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ are termenul general $x_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Observăm că

$$x_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice } n\in\mathbb{N}^*,$$

şi obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi are suma 1, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

Seria din exemplul precedent este o *serie telescopică*, adică are proprietatea că termenul general se poate scrie sub forma $x_n = a_n - a_{n+1}$, $n \geq 1$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$ este şir de numere reale. În acest caz, şirul sumelor parţiale are termenul general

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + ... + a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}.$$

Deci, seria telescopică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. În acest caz, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a_1 - l$, unde $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Exemplul 2.1.9** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$ este o serie telescopică, întrucât termenul general se poate scrie sub următoarea formă

$$x_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, $S_n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, rezultă că şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$ este divergentă.

### 2.1.2 Proprietăţi generale

Prin *natura unei serii* înţelegem proprietatea seriei de a fi convergentă sau divergentă. Spunem că două serii au aceeaşi natură dacă sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Vom arăta mai întâi că, dacă unei serii i se adaugă sau i se elimină un număr finit de termeni, atunci natura ei nu se schimbă. În cazul în care seria este convergentă, suma se modifică, prin adăugarea (respectiv eliminarea) sumei finite a termenilor adăugaţi (respectiv eliminaţi).

**Teorema 2.1.10** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$ au aceeaşi natură.*

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, adică

$$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n, \ n \in \mathbb{N},$$

şi $(T_n)_{n\geq k}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$, adică

$$T_n = x_k + x_{k+1} + ... + x_n,\ n \geq k.$$

Observăm că

$$T_n = S_n - (x_0 + ... + x_{k-1}) = S_n - S_{k-1},\ n \geq k.$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi are suma $S$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = S - S_{k-1} \in \mathbb{R}$; prin urmare, seria $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$ este convergentă. Dacă seria $\sum\limits_{n=k}^{\infty} x_n$ este convergentă şi are suma $T$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = T + S_{k-1} \in \mathbb{R}$, deci şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. ∎

Următoarea teoremă ne dă o condiţie necesară (dar nu şi suficientă) de convergenţă a unei serii.

**Teorema 2.1.11** *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

**Demonstraţie.** Fie $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Deoarece seria este convergentă, există $S \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Din definiţia şirului $(S_n)_{n\geq 0}$ se observă că

$$x_n = S_n - S_{n-1},\ \text{pentru orice } n \geq 1,$$

astfel că obţinem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ∎

**Observaţia 2.1.12** Condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ este necesară, dar nu suficientă pentru convergenţa seriei, cum se poate observa din exemplele următoare.

**Exemplul 2.1.13** Seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ are termenul general $x_n = \frac{1}{n}$ convergent la 0, dar este o serie divergentă, aşa cum am văzut în Exemplul 2.1.7.

**Exemplul 2.1.14** Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. Termenul general al său este

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Observăm că

$$x_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, dar

$$S_n = (\sqrt{1}-0) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + ... + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1},$$

prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, adică seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ este divergentă.

**Corolarul 2.1.15** *Dacă şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *nu are limită, sau are limită diferită de* 0, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Exemplul 2.1.16** Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă, întrucât şirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, nu are limită.

**Exemplul 2.1.17** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă, întrucât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0.$$

**Exerciţiul 2.1.18** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin n$ este divergentă.

*Rezolvare*. Vom arăta că şirul $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, nu are limită. Să presupunem prin reducere la absurd că există $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ şi să notăm această limită cu $l$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(\sin(n+1) - \sin(n-1)) = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) - \lim_{n\to\infty} \sin(n-1) = l - l = 0. \tag{2.1}$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = \lim_{n\to\infty} 2\sin 1 \cos n = 2\sin 1 \lim_{n\to\infty} \cos n. \tag{2.2}$$

Din (2.1) şi (2.2) obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$. Fie subşirul termenilor de rang par, $x_{2k} = \sin 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Bineînţeles, $\lim\limits_{k\to\infty} \sin 2k = l$. Pe de altă parte,

$$\lim_{k\to\infty} \sin 2k = \lim_{k\to\infty} 2\sin k \cos k = 2l \lim_{k\to\infty} \cos k = 0.$$

Rezultă că

$$l = \lim_{k\to\infty} \sin 2k = 0.$$

Prin urmare, obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin^2 n + \cos^2 n\right) = 0.$$

Cum $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, am ajuns la o contradicţie. Deci şirul $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$, nu are limită.

**Exerciţiul 2.1.19** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$ este divergentă.

*Rezolvare*. Fie $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{3^{n+1} \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right]} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3},$$

deci şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ nu tinde la zero.

## Operaţii cu serii

**Teorema 2.1.20** *Dacă seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci seria sumă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n. \tag{2.3}$$

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şi $(T_n)_{n\geq 0}$ şirurile sumelor parţiale ale seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi respectiv $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, ale căror sume le notăm cu $S$ şi respectiv $T$. Fie $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$, adică

$$\sigma_n = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) + ... + (x_n + y_n) = S_n + T_n.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ rezultă că şirul $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge la $S+T$. În concluzie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ este convergentă şi (2.3) are loc. ■

**Observaţia 2.1.21** În cazul în care seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt divergente, atunci se poate întâmpla ca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n+y_n)$ să fie convergentă. Este cazul exemplului următor.

**Exemplul 2.1.22** Fie seriile divergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$. Se observă uşor că seria sumă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right]$ este convergentă.

**Teorema 2.1.23** *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Atunci seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ *au aceeaşi natură. În caz de convergenţă,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n. \tag{2.4}$$

**Demonstraţie.** Să presupunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi are suma $S$. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat acestei serii şi fie $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$, adică

$$T_n = \alpha x_0 + \alpha x_1 + ... + \alpha x_n = \alpha S_n.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \alpha S \in \mathbb{R}$. Deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ este convergentă şi (2.4) are loc. Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şirul

$(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent, ceea ce implică faptul că şirul $(T_n)_{n\geq 0}$ este divergent, adică seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha x_n$ este divergentă. Cealaltă parte a teoremei se obţine din prima, înlocuind $\alpha$ cu $\dfrac{1}{\alpha}$. ■

**Corolarul 2.1.24** *Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, atunci seria diferenţă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)$ este convergentă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

**Teorema 2.1.25** (Criteriul lui Cauchy). *Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Conform Definiţiei 2.1.3, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, ceea ce, conform Teoremei 1.3.4, este echivalent cu faptul că şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$, să avem $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Dar,

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (x_0 + x_1 + ... + x_{n+p}) - (x_0 + x_1 + ... + x_n) \\ &= x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}, \end{aligned}$$

deci condiţia din teoremă exprimă tocmai faptul că şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy. ■

**Exerciţiul 2.1.26** Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha \geq 2$, este convergentă.

<u>*Rezolvare*</u>. Fie $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\alpha \geq 2$, rezultă că,

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(n+p)^\alpha}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } p \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, să avem $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon,$$

adică, conform Criteriului lui Cauchy, seria dată este convergentă.

## 2.2 Serii cu termeni pozitivi

În acest capitol vom prezenta criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi. Să precizăm că o serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este cu termeni pozitivi dacă $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Criteriile pentru serii cu termeni pozitivi pot fi aplicate şi seriilor care au toţi termenii pozitivi cu excepţia unui număr finit, deoarece natura unei serii nu se modifică dacă adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni (vezi Teorema 2.1.10).

Să observăm mai întâi că seriile cu termeni pozitivi au şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ crescător. Într-adevăr, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = S_n + x_{n+1},$$

deci

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0.$$

Cum un şir crescător este convergent dacă şi numai dacă este mărginit superior (vezi Teoremele 1.2.44 şi 1.2.51), obţinem următorul criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

**Teorema 2.2.1** *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor sale parţiale* $(S_n)_{n\geq 0}$ *este mărginit superior.*

**Observaţia 2.2.2** Dacă seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$.

**Exerciţiul 2.2.3** Să se arate că seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă.

<u>*Rezolvare*</u>. Vom arăta că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 1}$ nu este mărginit superior. Într-adevăr, să considerăm subşirul sumelor parţiale $(S_{2^k})_{k\geq 1}$. Grupând termenii cu indici între două puteri consecutive ale lui 2, avem

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k}$$

$$\begin{aligned} = \quad & 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3}\right) \\ & + ... + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + ... + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + ... + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Rezultă că $(S_{2^k})_{k\geq 1}$ este nemărginit, deci şi $(S_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit. Regăsim astfel rezultatul din Exemplul 2.1.7.

### Criterii de comparaţie

**Teorema 2.2.4** (Criteriul de comparaţie de specia I). *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Presupunem că*

$$x_n \leq y_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

(i) *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

(ii) *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$. Deoarece $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că

$$x_0 + x_1 + ... + x_n \leq y_0 + y_1 + ... + y_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

adică

$$S_n \leq T_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

(i) Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, conform Teoremei 2.2.1, rezultă că şirul $(T_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, adică există $M > 0$ astfel încât $T_n \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci, din (2.5) rezultă că şi $S_n \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior. Aplicând din nou Teorema 2.2.1, obţinem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, rezultă că $(S_n)_{n\geq 0}$ nu este mărginit (conform Teoremei 2.2.1). Cum $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir crescător, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ şi folosind (2.5) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$, adică seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă. ■

**Observaţia 2.2.5** Dacă în teorema precedentă inegalitatea $x_n \leq y_n$ are loc pentru orice $n \geq n_0$, cu $n_0 \in \mathbb{N}^*$ fixat, concluzia se păstrează, deoarece seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$ au aceeaşi natură (conform Teoremei 2.1.10).

**Exerciţiul 2.2.6** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ este convergentă.

<u>*Rezolvare*</u>. Să observăm mai întâi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$x_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot ... \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

Atunci, cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (vezi Exerciţiul 2.1.26), deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ este convergentă, conform Criteriului de comparaţie de specia I, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ este convergentă.

**Exerciţiul 2.2.7** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, cu $\alpha < 1$, este divergentă.
<u>*Rezolvare*</u>. Pentru $\alpha < 1$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă (vezi Exemplul 2.1.7), conform Criteriului de comparaţie de specia I, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergentă, pentru orice $\alpha < 1$.

**Exerciţiul 2.2.8** Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n + 3^n}$ este convergentă.
<u>*Rezolvare*</u>. Convergenţa seriei date rezultă din Criteriul de comparaţie de specia I, deoarece are loc inegalitatea

$$\frac{1}{\ln n + 3^n} \le \frac{1}{3^n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ este convergentă (este seria geometrică de raţie $q = \frac{1}{3}$, vezi Exemplul 2.1.5).

**Teorema 2.2.9** (Criteriul de comparaţie de specia a II-a). *Fie seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, *cu* $x_n > 0$ *şi* $y_n > 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Presupunem că*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}, \textit{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

(i) *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
(ii) *Dacă seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** Din ipoteză avem inegalităţile:

$$\frac{x_1}{x_0} \le \frac{y_1}{y_0},\ \frac{x_2}{x_1} \le \frac{y_2}{y_1},\ \dots\ ,\frac{x_n}{x_{n-1}} \le \frac{y_n}{y_{n-1}}.$$

Înmulţindu-le membru cu membru, obţinem

$$\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} \le \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \ldots \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}},$$

adică

$$\frac{x_n}{x_0} \leq \frac{y_n}{y_0}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

sau

$$x_n \leq \frac{x_0}{y_0} y_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Cum $\frac{x_0}{y_0}$ este o constantă nenulă, conform Teoremei 2.1.23, seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_0}{y_0} y_n$ au aceeaşi natură. Prin urmare, concluzia teoremei se obţine uşor din (2.6) cu ajutorul Criteriului de comparaţie de specia I. ■

**Teorema 2.2.10** (Criteriul de comparaţie cu limită). *Fie seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, *cu* $x_n \geq 0$ *şi* $y_n > 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in [0, +\infty].$$

(i) *Dacă* $l \in (0, +\infty)$, *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*
(ii) *Dacă* $l = 0$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
(iii) *Dacă* $l = +\infty$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Este suficient să arătăm că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in (0, +\infty)$, rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_0$, să avem

$$\frac{l}{2} < \frac{x_n}{y_n} < l + 1,$$

sau

$$\frac{l}{2} y_n < x_n < (l+1)\, y_n, \text{ pentru orice } n \geq n_0. \tag{2.7}$$

Să presupunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. Atunci, folosind Criteriul de comparaţie de specia I, din prima parte a inegalităţii (2.7) rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{l}{2} y_n$ este convergentă. Dar, conform Teoremei 2.1.23, această serie are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, deci aceasta din urmă este convergentă. Invers, dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci, conform Teoremei 2.1.23, şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (l+1)\, y_n$ este convergentă. Prin urmare, folosind a doua inegalitate din (2.7) şi Criteriul de comparaţie de specia I rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. Similar se demonstrează punctele (ii) şi (iii). ■

**Observaţia 2.2.11** Din (ii) şi (iii), prin metoda reducerii la absurd, obţinem următoarele implicaţii:
(a) Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.
(b) Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă.

**Observaţia 2.2.12** Criteriile de mai sus ne dau posibilitatea de a stabili dacă o serie este convergentă sau divergentă, comparând-o cu altă serie a cărei natură o cunoaştem.

**Exerciţiul 2.2.13** Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(2n+1)}}. \tag{2.8}$$

<u>*Rezolvare*</u>. Vom compara această serie cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, care este o serie divergentă (vezi Exemplul 2.1.7). Fie $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,(2n+1)}}$ şi $y_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n\,(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, +\infty)\,,$$

deci, conform Criteriului de comparaţie cu limită, seria (2.8) are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, deci este divergentă.

**Exercițiul 2.2.14** Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}. \tag{2.9}$$

*Rezolvare*. Vom compara această serie cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este o serie divergentă (vezi Exemplul 2.1.7). Fie $x_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ şi $y_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \in (0, +\infty),$$

deci, conform Criteriului de comparaţie cu limită, seria (2.9) are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci este divergentă.

**Exercițiul 2.2.15** Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{(n+1)(n+2)}}. \tag{2.10}$$

*Rezolvare*. Vom compara această serie cu seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (vezi Exercițiul 2.1.26). Fie $x_n = \frac{1}{n\sqrt{(n+1)(n+2)}}$ şi $y_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n\sqrt{(n+1)(n+2)}} = 1 \in (0, +\infty),$$

deci, conform Criteriului de comparaţie cu limită, seria (2.10) are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, deci este convergentă.

**Exercițiul 2.2.16** Să se determine natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

*Rezolvare*. Vom compara această serie cu seria geometrică cu raţia $q = \frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, care este convergentă (vezi Exemplul 2.1.5). Fie $x_n = \frac{1}{2^n - n}$ şi

$y_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n\left(1 - \dfrac{n}{2^n}\right)} = 1 \in (0, +\infty)\,,$$

deci, conform Criteriului de comparaţie cu limită, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - n}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, deci este convergentă.

**Exerciţiul 2.2.17** Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2.11}$$

<u>*Rezolvare*</u>. Vom compara această serie cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{5/2}}$, care este convergentă (vezi Exemplul 2.1.5). Fie $x_n = \dfrac{1}{n^2} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ şi $y_n = \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculăm limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{n^2} \cdot n^2\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0, +\infty)\,,$$

deci, conform Criteriului de comparaţie cu limită, seria (2.11) are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$, deci este convergentă.

### Criteriul rădăcinii sau Criteriul lui Cauchy

**Teorema 2.2.18** (Criteriul rădăcinii cu mărginire). *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*
(i) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $q \in (0, 1)$ *astfel încât* $\sqrt[n]{x_n} \leq q$, *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
(ii) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$, *pentru orice* $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Deoarece

$$x_n \leq q^n, \text{ pentru orice } n \geq n_0,$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in (0,1)$, este convergentă, conform Criteriului de comparaţie de specia I rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Din ipoteză avem că $x_n \geq 1$, pentru orice $n \geq n_0$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu converge la zero. Conform Corolarului 2.1.15 rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

**Corolarul 2.2.19** (Criteriul rădăcinii cu limită). *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in [0, +\infty].$$

(i) *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

(ii) *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l < 1$ şi fie $q \in (l, 1)$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q.$$

Prin urmare, cum $q < 1$, conform Criteriului rădăcinii cu mărginire, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l > 1$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1$$

şi conform Criteriului rădăcinii cu mărginire rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

**Observaţia 2.2.20** Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi stabilită cu ajutorul acestui criteriu. Într-adevăr, considerând seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$, observăm că, pentru prima serie,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

iar pentru a doua serie,

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

deci în ambele cazuri $l = 1$; însă, prima serie este convergentă, iar a doua serie este divergentă.

**Exerciţiul 2.2.21** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}. \tag{2.12}$$

<u>*Rezolvare*</u>. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1.$$

Conform Criteriului rădăcinii, seria (2.12) este convergentă.

**Exerciţiul 2.2.22** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n, \ a > 0.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Termenul general al seriei este $x_n = \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right) = a.$$

Conform Criteriului rădăcinii, dacă $a < 1$, atunci seria dată este convergentă, iar dacă $a > 1$, seria este divergentă. Dacă $a = 1$ nu putem aplica Criteriul rădăcinii, dar, în acest caz, observăm că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n(n+1)}{n^2}} = e.$$

Termenul general al seriei neavând limita 0, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ este divergentă.

### Criteriul raportului

**Teorema 2.2.23** (Criteriul raportului cu mărginire). *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.
(i) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $q \in (0,1)$ *astfel încât, pentru orice* $n \geq n_0$, *să avem* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
(ii) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât, pentru orice* $n \geq n_0$, *să avem* $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Luând $y_n = q^n$ avem $\frac{y_{n+1}}{y_n} = q$. Prin urmare, obţinem că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, întrucât $q < 1$, din Criteriul de comparaţie de specia a II-a rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Inegalitatea din ipoteză se poate scrie sub forma

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n}, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, din Criteriul de comparaţie de specia a II-a rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ∎

**Corolarul 2.2.24** (Criteriul raportului cu limită). *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$*, cu* $x_n > 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*. Presupunem că există*

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \in [0, +\infty] \,.$$

(i) *Dacă* $l < 1$*, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

(ii) *Dacă* $l > 1$*, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$ şi fie $q \in (l, 1)$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q,$$

prin urmare, cum $q < 1$, conform Criteriului raportului cu mărginire, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$$

şi conform Criteriului raportului cu mărginire rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

**Observaţia 2.2.25** Dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, atunci nu putem decide natura seriei cu ajutorul Criteriului raportului. Într-adevăr, considerând seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, observăm că în ambele cazuri $l = 1$; însă, prima serie este divergentă, iar a doua serie este convergentă.

**Exerciţiul 2.2.26** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}. \tag{2.13}$$

Rezolvare. Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{n+1}+5\right)3^n}{\left(2^n+5\right)3^{n+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\left(1+\dfrac{5}{2^{n+1}}\right)}{2^n\left(1+\dfrac{5}{2^n}\right)} = \frac{2}{3} < 1.$$

Conform Criteriului raportului, seria (2.13) este convergentă.

**Exercițiul 2.2.27** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}. \tag{2.14}$$

Rezolvare. Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Conform Criteriului raportului, seria (2.14) este divergentă.

**Criteriul Raabe-Duhamel**

În unele cazuri în care nu se poate stabili natura seriei cu Criteriul raportului, se poate aplica criteriul următor:

**Teorema 2.2.28** (Criteriul Raabe-Duhamel cu mărginire). *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.
(i) *Dacă există* $q > 1$ *și* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *să avem* $n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
(ii) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât, pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *să avem* $n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstrație.** (i) Din ipoteză rezultă că

$$nx_n - nx_{n+1} \geq qx_{n+1}$$

sau

$$nx_n - (n+1)\,x_{n+1} \geq (q-1)\,x_{n+1}, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Astfel obţinem inegalităţile:

$$\begin{aligned} n_0 x_{n_0} - (n_0+1)\, x_{n_0+1} &\geq (q-1)\, x_{n_0+1} \\ (n_0+1) x_{n_0+1} - (n_0+2)\, x_{n_0+2} &\geq (q-1)\, x_{n_0+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(n-1)x_{n-1} - n x_n \geq (q-1)\, x_n$$

care, prin adunare, conduc la

$$n_0 x_{n_0} - n x_n \geq (q-1)\,(x_{n_0+1} + x_{n_0+2} + ... + x_n)$$

sau

$$n_0 x_{n_0} \geq n_0 x_{n_0} - n x_n \geq (q-1)\,(S_n - S_{n_0}).$$

De aici obţinem

$$S_n \leq \frac{1}{q-1} n_0 x_{n_0} + S_{n_0}, \text{ pentru orice } n \geq n_0,$$

adică şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Din ipoteză avem $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n}$, pentru orice $n \geq n_0$, sau

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă, din Criteriul de comparaţie de specia a II-a rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

**Corolarul 2.2.29** (Criteriul Raabe-Duhamel cu limită). *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in [0, +\infty].$$

(i) *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

(ii) *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

**Demonstraţie.** (i) Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=l>1$ şi fie $q\in(1,l)$. Atunci există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, să avem

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\geq q>1.$$

Conform Criteriului Raabe-Duhamel cu mărginire rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

(ii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=l<1$ atunci există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, să avem

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\leq 1.$$

Conform Criteriului Raabe-Duhamel cu mărginire rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

**Observaţia 2.2.30** Dacă $l=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=1$, atunci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul Criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

**Exerciţiul 2.2.31** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{1}{n^2}. \tag{2.15}$$

*Rezolvare*. Termenul general al seriei este

$$x_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Vom încerca să aplicăm Criteriul raportului cu limită. Avem

$$x_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n\cdot(2n+2)}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$$

deci nu putem stabili natura seriei cu ajutorul Criteriul raportului. Vom aplica Criteriul Raabe-Duhamel cu limită. Pentru aceasta calculăm

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+6n+2}{2n^2+n}=\frac{5}{2}>1.\end{aligned}$$

Prin urmare, seria (2.15) este convergentă.

**Exercițiul 2.2.32** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)},\ a>0.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Termenul general al seriei este $x_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)}\cdot\frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n+1}=1,$$

deci nu putem stabili natura seriei cu ajutorul Criteriului raportului. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a.$$

Conform Criteriului Raabe-Duhamel cu limită, dacă $a>1$, atunci seria este convergentă, iar dacă $a<1$, atunci seria este divergentă. Dacă $a=1$, nu putem stabili natura seriei cu acest criteriu. În acest caz, observăm că

$$x_n=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

deci seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$, care are aceeași natură cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, deci este o serie divergentă.

**Criteriul condensării (al lui Cauchy)**

**Teorema 2.2.33** *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir descrescător de numere reale pozitive. Atunci seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ataşat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, pentru orice $k \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= x_0 + x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + ... + x_{2^{k-1}} + \left(x_{2^{k-1}+1} + ... + x_{2^k}\right) \\ &\geq x_0 + x_1 + x_2 + 2x_4 + ... + 2^{k-1} x_{2^k} \\ &= x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\left(x_1 + 2x_2 + 4x_4 + ... + 2^k x_{2^k}\right) \\ &= x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}T_k, \end{aligned}$$

deci

$$S_{2^k} \geq x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}T_k, \text{ pentru orice } k \geq 1. \tag{2.16}$$

De asemenea, pentru orice $k \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= x_0 + x_1 + (x_2 + x_3) + ... + (x_{2^{k-1}} + x_{2^{k-1}+1} + ... + x_{2^k-1}) \\ &\leq x_0 + x_1 + 2x_2 + 4x_4 + ... + 2^{k-1} x_{2^{k-1}} \\ &= x_0 + T_{k-1} \leq x_0 + T_k \end{aligned}$$

deci

$$S_{2^k-1} \leq x_0 + T_k, \text{ pentru orice } k \geq 1. \tag{2.17}$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, conform Teoremei 2.2.1, există $M > 0$ astfel încât $S_n \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Din (2.16) rezultă că

$$x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}T_k \leq M, \text{ pentru orice } k \geq 1$$

sau

$$T_k \leq 2M - 2x_0 - x_1, \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

adică şirul $(T_k)_{k\geq 0}$ este mărginit superior. Aplicând din nou Teorema 2.2.1 rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Prin urmare, $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k-1} = +\infty$ şi, din (2.17), rezultă că $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = +\infty$, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este divergentă. ■

**Corolarul 2.2.34** *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

**Demonstraţie.** Termenul general al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Observăm că dacă $\alpha < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă (conform Corolarului 2.1.15). Dacă $\alpha = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă. Dacă $\alpha > 0$, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, astfel că putem aplica Criteriul condensării. Conform acestui criteriu, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, care este o serie geometrică de raţie $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Aplicând rezultatul din Exemplul 2.1.5, rezultă că: pentru $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, adică $\alpha > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ este convergentă, prin urmare şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă, iar dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ este divergentă, de unde şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă. ■

**Observaţia 2.2.35** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, se numeşte *seria armonică generalizată*.

## 2.3 Serii cu termeni oarecare

Vom prezenta mai întâi două criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare, Criteriul lui Dirichlet şi Criteriul lui Abel. Aceste criterii se referă la serii de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, unde $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ sunt şiruri de numere reale. Bineînţeles, orice serie numerică se poate scrie în această formă.

Următorul rezultat va fi folosit în demonstraţia acestor criterii.

**Lema 2.3.1** *Fie* $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ *şi* $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leq M$, *astfel încât*

$$m \leq x_0, x_0 + x_1, ..., x_0 + x_1 + ... + x_n \leq M,$$

*iar*

$$y_0 \geq y_1 \geq ... \geq y_n \geq 0.$$

*Atunci*

$$my_0 \leq x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_n y_n \leq M y_0.$$

**Demonstraţie.** Fie $S_i = x_0 + x_1 + ... + x_i$, pentru orice $i = 0, 1, ..., n$. Avem

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_n y_n = S_0 y_0 + (S_1 - S_0) y_1 + ... + (S_n - S_{n-1}) y_n$$

$$= S_0 (y_0 - y_1) + S_1 (y_1 - y_2) + ... + S_{n-1} (y_{n-1} - y_n) + S_n y_n.$$

Cum $m \leq S_i \leq M$, pentru orice $i = 0, 1, ..., n$, obţinem

$$m (y_i - y_{i+1}) \leq S_i (y_i - y_{i+1}) \leq M (y_i - y_{i+1}),$$

pentru orice $i = 0, 1, ..., n - 1$. Prin urmare,

$$m(y_0 - y_n) \leq S_0(y_0 - y_1) + S_1(y_1 - y_2) + ... + S_{n-1}(y_{n-1} - y_n) \leq M(y_0 - y_n),$$

de unde

$$m (y_0 - y_n) + S_n y_n \leq x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_n y_n \leq M (y_0 - y_n) + S_n y_n.$$

Cum $m \leq S_n \leq M$, obţinem inegalitatea dorită. ■

**Teorema 2.3.2** (Criteriul lui Dirichlet). *Fie seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, *unde* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *sunt şiruri de numere reale. Dacă:*

(i) *seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *are şirul sumelor parţiale mărginit şi*

(ii) *şirul* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este monoton descrescător şi are limita* 0,

*atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie.** Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, adică $S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$|S_n| \leq M.$$

Ne propunem să utilizăm Criteriul lui Cauchy. Fie $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Avem

$$|T_{n+p} - T_n| = |x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + ... + x_{n+p}y_{n+p}| .$$

Observăm că $x_{n+1} + ... + x_{n+k} = S_{n+k} - S_n$ şi $|S_{n+k} - S_n| \leq |S_{n+k}| + |S_n| \leq 2M$, pentru orice $k = 1, 2, ..., p$. Prin urmare, obţinem

$$-2M \leq x_{n+1}, x_{n+1} + x_{n+2}, ..., x_{n+1} + ... + x_{n+p} \leq 2M.$$

Atunci, conform lemei precedente, avem

$$-2My_{n+1} \leq x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + ... + x_{n+p}y_{n+p} \leq 2My_{n+1},$$

adică

$$|x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + ... + x_{n+p}y_{n+p}| \leq 2My_{n+1}. \tag{2.18}$$

Pe de altă parte, cum $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, are loc

$$y_n < \frac{\varepsilon}{2M + 1}. \tag{2.19}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}$. Din (2.18) şi (2.19) rezultă că

$$|x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + ... + x_{n+p}y_{n+p}| < \varepsilon,$$

şi, conform Criteriului lui Cauchy, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. ■

**Exerciţiul 2.3.3** Să se arate că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{2.20}$$

este convergentă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
*Rezolvare*. Să observăm mai întâi că această serie se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n},$$

astfel că vom folosi Criteriul lui Dirichlet cu $x_n = \sin nx$ şi $y_n = \dfrac{1}{n}$. Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, adică

$$S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx.$$

Dacă $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$\begin{aligned} |S_n| &= |\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx| = \left| \frac{\cos \dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right) x}{2 \sin \dfrac{x}{2}} \right| \\ &\leq \frac{2}{2\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

iar dacă $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci

$$|S_n| = |\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx| = 0.$$

Prin urmare, şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Pe de altă parte, şirul $y_n = \dfrac{1}{n}$ este descrescător şi convergent la 0. Condiţiile Criteriului lui Dirichlet sunt satisfăcute, deci seria (2.20) este convergentă.

**Teorema 2.3.4** (Criteriul lui Abel). *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, *unde* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *sunt şiruri de numere reale. Dacă:*

(i) *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă şi*

(ii) *şirul* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este şir monoton şi mărginit,*

*atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie.** Deoarece şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent, deci există $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ şi $y \in \mathbb{R}$. Să presupunem că şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este descrescător. În caz contrar, considerăm seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(-y_n) = -\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$$

care are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Să notăm

$$z_n = y_n - y,\ n \in \mathbb{N}.$$

Şirul $(z_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi are limita 0. Pe de altă parte, deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, rezultă că şirul sumelor parţiale asociat este convergent, deci mărginit. Conform Criteriului lui Dirichlet rezultă că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z_n$$

este convergentă. Cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y x_n$ este convergentă. Conform Teoremei 2.1.20 rezultă că seria sumă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n z_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} y x_n$ este convergentă şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n=0}^{\infty} y x_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n z_n + y x_n),$$

adică seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă, întrucât $x_n z_n + y x_n = x_n y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. ■

**Exerciţiul 2.3.5** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}. \tag{2.21}$$

<u>*Rezolvare*</u>. Să observăm mai întâi că această serie se poate scrie sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n},$$

astfel că vom folosi Criteriul lui Abel cu $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$ şi $y_n = \cos \dfrac{1}{n}$. Folosind Criteriul lui Dirichlet se arată că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$ este convergentă. Deoarece şirul $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ este descrescător şi mărginit de 0 şi 1, iar funcţia cosinus este descrescătoare pe $[0, \pi]$, rezultă că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este crescător. În plus, avem $\left|\cos \dfrac{1}{n}\right| \leq 1$, pentru orice $n \geq 1$, adică şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Conform Teoremei lui Abel, seria (2.21) este convergentă.

**Serii alternante**

Un caz particular de serii cu termeni oarecare îl reprezintă seriile alternante.

**Definiţia 2.3.6** O serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeşte *alternantă* dacă termenii săi alternează ca semn, adică

$$x_n x_{n+1} < 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Orice serie alternantă poate fi scrisă în una din următoarele două forme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \text{ cu } a_n \geq 0, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 2.3.7** (Criteriul lui Leibniz). *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir descrescător de numere reale pozitive, convergent la* 0. *Atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *este convergentă.*

**Demonstraţie.** Vom utiliza Criteriul lui Dirichlet. Fie $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Se observă uşor că $S_n = 1$ pentru $n$ par şi $S_n = 0$ pentru $n$ impar, deci $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Cum şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi convergent la 0, conform Criteriului lui Dirichlet obţinem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă. ■

**Exemplul 2.3.8** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

este convergentă conform Criteriului lui Leibniz, deoarece şirul $a_n = \dfrac{1}{n}$ tinde descrescător la 0.

**Exemplul 2.3.9** Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

este convergentă conform Criteriului lui Leibniz, deoarece şirul $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ tinde descrescător la 0.

**Serii absolut convergente**

**Definiţia 2.3.10** Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *absolut convergentă* dacă seria modulelor, adică seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$, este convergentă.

**Exemplul 2.3.11** Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

este absolut convergentă întrucât seria modulelor este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

despre care am arătat că este o serie convergentă.

**Observaţia 2.3.12** Pentru serii cu termeni pozitivi, noţiunile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid.

**Observaţia 2.3.13** Deoarece seria modulelor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenţei acesteia se pot utiliza criteriile de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi prezentate anterior.

**Teorema 2.3.14** *Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*

**Demonstraţie.** Deoarece seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, rezultă că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. Conform Criteriului lui Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem

$$||x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}|| < \varepsilon,$$

adică

$$|x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}$. Avem

$$|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon,$$

prin urmare, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. ■

**Observaţia 2.3.15** Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente (vezi exemplul următor).

**Exemplul 2.3.16** Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

**Definiţia 2.3.17** Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *semiconvergentă* dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, dar seria modulelor, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$, este divergentă.

**Exerciţiul 2.3.18** Studiaţi absoluta convergenţă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Deoarece $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, pentru orice $n \geq 1$ şi orice $x \in \mathbb{R}$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, conform Criteriului de comparaţie de specia I, rezultă că seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right|$ este convergentă. Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

**Exerciţiul 2.3.19** Studiaţi absoluta convergenţă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Observăm că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este o serie alternantă şi, conform Criteriului lui Leibniz, este convergentă. Seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este semiconvergentă.

# Capitolul 3

# Spaţiul $\mathbb{R}^k$

## 3.1 Structura de spaţiu liniar a lui $\mathbb{R}^k$

Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale şi $k \geq 1$ un număr natural fixat. Definim mulţimea

$$\mathbb{R}^k = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{de } k \text{ ori}}.$$

Un element $x \in \mathbb{R}^k$ se numeşte *punct* şi se notează $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$. Numerele reale $x_1, x_2, ..., x_k$ se numesc *coordonatele* lui $x$.

Fie punctele $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ ambele aparţinând mulţimii $\mathbb{R}^k$. Amintim că punctele $x$ şi $y$ sunt egale şi notăm $x = y$ dacă şi numai dacă $x_i = y_i$, pentru orice $i = 1, 2, ..., k$.

Definim două operaţii:

1) Adunarea în $\mathbb{R}^k$.

Pentru orice puncte $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$ se defineşte suma $x + y$ astfel:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k).$$

Adică, adunarea punctelor în $\mathbb{R}^k$ înseamnă adunarea după coordonate.

2) Înmulţirea cu scalari în $\mathbb{R}^k$.

Pentru orice număr $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice punct $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ se defineşte produsul $\lambda x$ astfel:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_k).$$

Adică, înmulţirea unui element $x \in \mathbb{R}^k$ cu scalarul $\lambda$ înseamnă înmulţirea tuturor coordonatelor lui $x$ cu $\lambda$.

Se verifică cu uşurinţă faptul că $\mathbb{R}^k$ este grup comutativ faţă de operaţia de adunare definită mai sus, iar operaţia de înmulţire cu scalari are proprietăţile:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$$

$$1x = x,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$ şi orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $\mathbb{R}^k$ are structură algebrică de spaţiu liniar faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari definite mai sus.

## 3.2 Structura de spaţiu normat a lui $\mathbb{R}^k$

Definim funcţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ prin

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$. Valoarea $\|x\|$ se numeşte *norma* lui $x$.

Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x$ are o singură coordonată şi $\|x\| = |x|$, unde $|x|$ reprezintă modulul lui $x$.

Prezentăm în continuare proprietăţile fundamentale ale normei:

N$_1$) $\|x\| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$; $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$;

N$_2$) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $x \in \mathbb{R}^k$;

N$_3$) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$.

**Demonstraţie.** N$_1$) Evident, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$. Dacă $\|x\| = 0$, atunci $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 0$, de unde rezultă că $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$, adică $x = 0$.

N$_2$) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + ... + (\lambda x_k)^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}$
$= |\lambda| \, \|x\|$.

N$_3$) Să arătăm că are loc inegalitatea

$$(x_1 y_1 + ... + x_k y_k)^2 \leq \left(x_1^2 + ... + x_k^2\right)\left(y_1^2 + ... + y_k^2\right).$$

Pentru aceasta, considerăm polinomul de gradul al doilea:

$$P(t) = (x_1 + y_1 t)^2 + ... + (x_k + y_k t)^2 \geq 0, \; t \in \mathbb{R}.$$

Ordonând $P(t)$ după puterile lui $t$, obţinem

$$P(t) = \left(y_1^2 + ... + y_k^2\right) t^2 + 2\left(x_1 y_1 + ... + x_k y_k\right) t + x_1^2 + ... + x_k^2 \geq 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Atunci, discriminantul

$$\Delta = 4\left(x_1 y_1 + ... + x_k y_k\right)^2 - 4\left(x_1^2 + ... + x_k^2\right)\left(y_1^2 + ... + y_k^2\right) \leq 0.$$

Rezultă că $\left(x_1 y_1 + ... + x_k y_k\right)^2 \leq \left(x_1^2 + ... + x_k^2\right)\left(y_1^2 + ... + y_k^2\right)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

De asemenea, norma verifică următoarele proprietăţi importante:
N$_4$) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$;
N$_5$) $\|\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n\| \leq |\lambda_1| \|u_1\| + ... + |\lambda_n| \|u_n\|$, pentru orice $\lambda_i \in \mathbb{R}$ şi $u_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, ..., n$;
N$_6$) $|x_i| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|$, $i = 1, 2, ..., k$, $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$.
**Demonstraţie.** N$_4$) Vom folosi proprietatea N$_3$. Avem

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

deci

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Inversând rolurile lui $x$ şi $y$ obţinem şi

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

N$_5$) Se demonstrează aplicând succesiv N$_3$ şi N$_2$.
N$_6$) Prima inegalitate este evidentă. Să demonstrăm că

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2} \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|,$$

echivalentă cu

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 \leq \left(|x_1| + |x_2| + ... + |x_k|\right)^2.$$

Cum $|x_i|^2 = x_i^2$, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} |x_i| |x_j|,$$

care, evident, este adevărată. ■

## 3.3 Produs scalar

**Definiţia 3.3.1** Se numeşte *produs scalar* în $\mathbb{R}^k$ funcţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_k y_k,$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

Au loc următoarele proprietăţi fundamentale:
S$_1$) $\langle x, x \rangle \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$; $\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$;
S$_2$) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$;
S$_3$) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $x, y \in \mathbb{R}^k$;
S$_4$) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^k$.

Verificarea acestor proprietăţi se face fără dificultate folosind definiţia produsului scalar.

Prezentăm în continuare alte două proprietăţi ale produsului scalar:
S$_5$) $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$;
S$_6$) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$.

**Demonstraţie.** S$_5$) Rezultă imediat pe baza definiţiilor produsului scalar şi normei.
S$_6$) Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \lambda y_i)^2 \geq 0,$$

adică

$$\|y\|^2 \lambda^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \|x\|^2 \geq 0,$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Aceasta are loc dacă discriminantul trinomului este negativ, adică

$$\Delta = 4 \left( \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \right) \leq 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

## 3.4 Topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^k$

**Definiţia 3.4.1** Fie $x_0 \in \mathbb{R}^k$ şi $r > 0$.
(i) Se numeşte *sferă deschisă centrată în* $x_0$ *şi de rază* $r$ mulţimea

$$S(x_0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k;\ \|x - x_0\| < r \right\}.$$

(ii) Se numeşte *sferă închisă centrată în $x_0$ şi de rază $r$* mulţimea

$$\overline{S}\left(x_0, r\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^k;\ \ \|x - x_0\| \le r\right\}.$$

În $\mathbb{R}$, sfera deschisă se reduce la

$$S\left(x_0, r\right) = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x - x_0| < r\} = \left(x_0 - r, x_0 + r\right),$$

adică intervalul deschis de lungime $2r$ şi centru $x_0$, iar sfera închisă

$$\overline{S}\left(x_0, r\right) = \left[x_0 - r, x_0 + r\right]$$

este intervalul închis de lungime $2r$ şi centru $x_0$.

În $\mathbb{R}^2$, sfera deschisă $S\left(x_0, r\right)$ este mulţimea punctelor din cercul cu centrul în $x_0$ şi de rază $r$, fără punctele de pe circumferinţă, iar sfera închisă $\overline{S}\left(x_0, r\right)$ este mulţimea precedentă, la care se adaugă şi punctele de pe circumferinţă.

**Definiţia 3.4.2** Fie $x_0 \in \mathbb{R}^k$ şi $V \subseteq \mathbb{R}^k$. Spunem că $V$ este *vecinătate* pentru $x_0$ dacă există $r > 0$ astfel încât $S\left(x_0, r\right) \subseteq V$.

**Observaţia 3.4.3** Sferele deschise sau închise centrate în $x_0$ sunt vecinătăţi ale lui $x_0$.

**Definiţia 3.4.4** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^k$. Spunem că mulţimea $D$ este *deschisă* dacă $D = \emptyset$ sau dacă $D$ este vecinătate pentru orice punct al său.

Familia tuturor mulţimilor deschise din $\mathbb{R}^k$ are următoarele proprietăţi:
1) $\emptyset$, $\mathbb{R}^k$ sunt mulţimi deschise.
2) O reuniune arbitrară de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.
3) O intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

**Definiţia 3.4.5** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Spunem că $A$ este *închisă* dacă $\mathbb{R}^k \backslash A$ este mulţime deschisă.

**Definiţia 3.4.6** Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte *mărginită* dacă există $r > 0$ astfel încât $A \subseteq \overline{S}\left(0, r\right)$.

**Definiţia 3.4.7** Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^k$ se numeşte *compactă* dacă este închisă şi mărginită.

**Definiţia 3.4.8** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}^k$ este *punct de acumulare* al mulţimii $A$ dacă orice vecinătate a punctului $x_0$ conţine puncte din $A$ diferite de $x_0$, adică

$$V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

oricare ar fi $V$ vecinătate a lui $x_0$.

**Definiţia 3.4.9** Fie $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Punctul $x_0 \in A$ este *punct izolat* pentru $A$ dacă nu este punct de acumulare.

## 3.5 Şiruri în $\mathbb{R}^k$

Se numeşte *şir de puncte* din $\mathbb{R}^k$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm şirul cu $(x_n)_{n\geq 0}$, unde $x_n = f(n) \in \mathbb{R}^k$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**Definiţia 3.5.1** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *mărginit* dacă mulţimea valorilor acestui şir este o mulţime mărginită în $\mathbb{R}^k$, adică există $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă toţi termenii şirului pot fi incluşi într-o sferă cu centrul în origine.

În caz contrar, spunem că şirul este *nemărginit.*

**Definiţia 3.5.2** Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}^k$ astfel încât pentru orice vecinătate $V$ a lui $x$ există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$, să avem $x_n \in V$. Punctul $x$ se numeşte *limita şirului.*

Notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$.

În caz contrar, şirul se numeşte *divergent.*

Folosind definiţia vecinătăţilor în $\mathbb{R}^k$ rezultă uşor următoarea teoremă de caracterizare a şirurilor convergente.

**Teorema 3.5.3** *Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^k$ converge la $x \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, să avem $\|x_n - x\| < \varepsilon$.*

**Teorema 3.5.4** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir din $\mathbb{R}^k$ şi $x \in \mathbb{R}^k$. Atunci $x_n \to x$ dacă şi numai dacă $\|x_n - x\| \to 0$.*

**Demonstraţie.** Observând că $\|x_n - x\| = |\|x_n - x\| - 0|$, concluzia se obţine imediat cu ajutorul teoremei precedente. ■

Astfel, convergenţa şirurilor din $\mathbb{R}^k$ revine la convergenţa unui şir de numere reale pozitive.

**Corolarul 3.5.5** *Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^k$ converge la zero dacă şi numai dacă şirul normelor $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ converge la zero (în $\mathbb{R}$).*

**Corolarul 3.5.6** *Dacă şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^k$ satisface $\|x_n - x\| \leq \alpha_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale pozitive, convergent la zero, atunci $x_n \to x$.*

**Propoziţia 3.5.7** *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent, atunci limita sa este unică.*

**Demonstraţie.** Presupunem prin reducere la absurd că există $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x \neq y$, astfel încât $x_n \to x$ şi $x_n \to y$. Din condiţia $x \neq y$ rezultă că există $V_x$ vecinătate a lui $x$ şi $V_y$ vecinătate a lui $y$ astfel încât

$$V_x \cap V_y = \emptyset. \tag{3.1}$$

Cum $x_n \to x$, rezultă că există $n_x \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V_x$, pentru orice $n \geq n_x$. De asemenea, deoarece $x_n \to y$, există $n_y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in V_y$, pentru orice $n \geq n_y$. Fie $n_0 = \max\{n_x, n_y\}$. Rezultă că $x_{n_0} \in V_x \cap V_y$, ceea ce contrazice $(3.1)$. ■

**Teorema 3.5.8** *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir din $\mathbb{R}^k$, $x_n = \left(x_n^1, x_n^2, ..., x_n^k\right)$, şi $x \in \mathbb{R}^k$, $x = \left(x^1, x^2, ..., x^k\right)$. Atunci $x_n \to x$ (în $\mathbb{R}^k$) dacă şi numai dacă $x_n^i \to x^i$ (în $\mathbb{R}$), pentru orice $i = 1, 2, ..., k$.*

**Demonstraţie.** Să presupunem că $x_n \to x$. Atunci, $\|x_n - x\| \to 0$. Pe de altă parte, pentru orice $i = 1, 2, ..., k$, avem

$$\left|x_n^i - x^i\right| \leq \|x_n - x\|,$$

de unde rezultă că $\left|x_n^i - x^i\right| \to 0$, deci $x_n^i \to x^i$.

Să presupunem acum că $x_n^i \to x^i$, pentru orice $i = 1, 2, ..., k$. Rezultă că $\left|x_n^i - x^i\right| \to 0$, pentru orice $i = 1, 2, ..., k$, deci şi $\left|x_n^1 - x^1\right| + \left|x_n^2 - x^2\right| + ... + \left|x_n^k - x^k\right| \to 0$. Cum

$$0 \leq \|x_n - x\| \leq \left|x_n^1 - x^1\right| + \left|x_n^2 - x^2\right| + ... + \left|x_n^k - x^k\right|,$$

rezultă că $\|x_n - x\| \to 0$, deci $x_n \to x$. ■

**Exemplul 3.5.9** Şirul $x_n = \left(\sqrt[n]{n}, n \ln \dfrac{n+1}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ din $\mathbb{R}^3$ este convergent la $x = (1,1,0)$.

**Exemplul 3.5.10** Şirul $y_n = \left(\sqrt[n]{n}, n \ln \dfrac{n+1}{n}, (-1)^n\right)$ din $\mathbb{R}^3$ este divergent.

**Teorema 3.5.11** *Fie şirurile* $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ *din* $\mathbb{R}^k$ *şi* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale.*
(i) *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi are limita* $x \in \mathbb{R}^k$*, atunci* $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ *este convergent şi are limita* $\|x\|$.
(ii) *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *sunt convergente, atunci* $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(iii) *Dacă* $x_n \to x \in \mathbb{R}^k$ *şi* $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$*, atunci* $\alpha_n x_n \to \alpha x$.
(iv) *Dacă* $x_n \to x \in \mathbb{R}^k$ *şi* $y_n \to y \in \mathbb{R}^k$*, atunci* $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

**Corolarul 3.5.12** *Orice şir convergent este mărginit.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}^k$ un şir convergent. Rezultă că şirul de numere reale $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ este convergent, deci mărginit. Prin urmare, există $M > 0$ astfel încât $\|x_n\| \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, adică şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

# Capitolul 4

# Limite şi continuitate pentru funcţii

## 4.1 Funcţii. Generalităţi.

În acest capitol vom studia funcţiile $f : D \to E$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $E \subseteq \mathbb{R}^q$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$. Precizăm mai întâi că o funcţie se numeşte *funcţie reală* dacă valorile sale sunt numere reale, adică $q = 1$. Avem următoarele situaţii:
I. $p = 1, q = 1$; funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to E \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie reală de variabilă reală*. De exemplu,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x.$$

II. $p > 1$, $q = 1$; funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to E \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie reală de variabilă vectorială* sau *funcţie reală de p variabile reale*. De exemplu,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

III. $p = 1$, $q > 1$; funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to E \subseteq \mathbb{R}^q$ se numeşte *funcţie vectorială de variabilă reală*. În acest caz,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_q(x)),$$

unde $f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., q$, sunt funcţii reale de variabilă reală, numite *componentele reale ale funcţiei vectoriale* $f$. Astfel, studiul funcţiei $f$ se reduce la studiul celor $q$ funcţii reale de variabilă reală. De exemplu,

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos t, \sin t).$$

IV. $p > 1$, $q > 1$; funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to E \subseteq \mathbb{R}^q$ se numeşte *funcţie vectorială de variabilă vectorială*. În acest caz,

$$f(x_1, ..., x_p) = (f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_q(x_1, ..., x_p)),$$

unde $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., q$, componentele funcţiei $f$, sunt funcţii reale de variabilă vectorială. Studiul funcţiei $f$ se reduce la studiul celor $q$ funcţii reale de $p$ variabile reale. De exemplu,

$$f : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ f(\rho, t) = (\rho \cos t, \rho \sin t).$$

**Definiţia 4.1.1** Spunem că funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este *mărginită* pe mulţimea $D$ dacă mulţimea valorilor funcţiei este mărginită, adică există $M > 0$ astfel încât $\|f(x)\| \leq M$, pentru orice $x \in D$.

**Exerciţiul 4.1.2** Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

*Rezolvare*. Domeniul de definiţie al funcţiei $f$ se determină din condiţia

$$\sin\left(x^2 + y^2\right) \geq 0,$$

adică

$$2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k + 1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare,

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 \in [2k\pi, (2k + 1)\pi]\right\},$$

adică domeniul de definiţie al funcţiei $f$ este mulţimea punctelor din plan care aparţin unei familii de coroane circulare cu centrul în origine.

**Exerciţiul 4.1.3** Determinaţi domeniul maxim de definiţie al funcţiei

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 6\right).$$

*Rezolvare*. Funcţia logaritmică este definită pentru

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 6 > 0,$$

adică

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 > 4.$$

Prin urmare, domeniul de definiţie al funcţiei $f$ este mulţimea punctelor din $\mathbb{R}^3$ situate în exteriorul sferei cu centrul $(1, 0, -3)$ şi rază 2.

## 4.2 Limite de funcţii

Fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^p$. Să presupunem că $x_0$ este punct de acumulare al mulţimii $D$, astfel că ne putem apropia oricât de mult de punctul $x_0$ prin puncte din mulţimea $D$. Ce se întâmplă atunci cu valorile funcţiei $f$ în aceste puncte? Pot apărea mai multe situaţii, dintre care, ne interesează aceea când, apropiindu-ne tot mai mult de $x_0$, cu puncte din $D$, valorile funcţiei $f$ se apropie oricât de mult vrem de un punct $l$ din $\mathbb{R}^q$. Atunci spunem că funcţia $f$ are limita $l$ în $x_0$.

**Definiţia 4.2.1** Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Spunem că $l \in \mathbb{R}^q$ este *limita funcţiei $f$ în punctul $x_0$* dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l$ există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât, pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Notăm

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

**Observaţia 4.2.2** Definiţia limitei unei funcţii se dă într-un punct de acumulare $x_0$ al mulţimii $D$ pe care este definită funcţia, care poate să nu aparţină mulţimii $D$. Dacă $f$ este definită în $x_0$, valoarea limitei în punctul $x_0$ nu depinde de valoarea funcţiei în $x_0$, adică $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, dacă există, şi $f(x_0)$ pot fi egale sau nu.

Dăm următoarea teoremă de caracterizare a noţiunii de limită.

**Teorema 4.2.3** *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *$l$ este limita funcţiei $f$ în punctul $x_0$;*
(ii) *pentru orice sferă deschisă $S(l, \varepsilon)$ există o sferă deschisă $S(x_0, \delta)$ astfel încât pentru orice $x \in S(x_0, \delta) \cap D$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in S(l, \varepsilon)$;*
(iii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \setminus \{x_0\}$, cu $\|x - x_0\| < \delta$, avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;*
(iv) *pentru orice şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de puncte din $D \setminus \{x_0\}$ convergent la $x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.*

**Demonstraţie.** Să observăm mai întâi că (ii) şi (iii) afirmă acelaşi lucru, deci sunt echivalente. Vom arăta următoarele implicaţii: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Demonstrăm că (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fie $V = S(l, \varepsilon)$ vecinătate a punctului $l$. Atunci, conform definiţiei limitei, există $U$ o vecinătate a lui $x_0$ astfel încât, pentru orice $x \in U \cap D$, cu $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Mulţimea $U$ fiind vecinătate pentru $x_0$, există o sferă deschisă $S(x_0, \delta) \subseteq U$. Prin urmare, pentru orice $x \in S(x_0, \delta) \cap D$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in V = S(l, \varepsilon)$.

Demonstrăm că (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Fie $(x_n)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din (ii) (care este echivalentă cu (iii)), există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \setminus \{x_0\}$, cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$, să avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, există $n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{\delta_\varepsilon}$, să rezulte $\|x_n - x_0\| < \delta_\varepsilon$. Prin urmare, obţinem $\|f(x_n) - l\| < \varepsilon$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{\delta_\varepsilon} = n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Demonstrăm că (iv) $\Longrightarrow$ (i). Presupunem prin reducere la absurd că există $V$, o vecinătate a lui $l$, astfel încât pentru orice vecinătate $U$ a lui $x_0$ să avem

$$f([U \setminus \{x_0\}] \cap D) \not\subset V. \tag{4.1}$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $U = S\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$. Din (4.1) rezultă că

$$f\left(\left[S\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\}\right] \cap D\right) \not\subset V,$$

adică există $x_n \in S\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right) \cap D$ cu $x_n \neq x_0$ astfel încât

$$f(x_n) \notin V. \tag{4.2}$$

Din $x_n \in S\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$ rezultă că

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

adică $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Conform (iv), $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$, adică există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ să avem $f(x_n) \in V$, ceea ce contrazice (4.2). Deci, presupunerea făcută este falsă şi implicaţia (iv) $\Longrightarrow$ (i) are loc. $\blacksquare$

**Observaţia 4.2.4** Afirmaţiile (i)-(iv) fiind echivalente, oricare dintre ele poate fi considerată definiţie a limitei unei funcţii într-un punct. Vom spune că (i) este *definiţia cu vecinătăţi*, (ii) este *definiţia cu sfere*, (iii) este *definiţia cu* $\varepsilon - \delta$, iar (iv) *definiţia cu şiruri* a limitei funcţiei $f$ în punctul $x_0$.

**Observaţia 4.2.5** Dacă $p = q = 1$, adică $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci sferele deschise sunt intervale deschise de pe axa reală, normele coincid cu modulul, iar $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(f(x_n))_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere reale.

**Exerciţiul 4.2.6** Să se arate că

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} xy^2 = 1.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = xy^2$. Punctul $(1,-1)$ este punct de acumulare pentru $D = \mathbb{R}^2$. Vom folosi definiţia limitei unei funcţii cu $\varepsilon - \delta$. Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ putem determina $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfăcând $\|(x,y) - (1,-1)\| < \delta$ să avem $|f(x,y) - 1| < \varepsilon$. Observăm că

$$\|(x,y) - (1,-1)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} < \delta$$

implică $|x-1| < \delta$ şi $|y+1| < \delta$. Scriem

$$f(x,y) - 1 = xy^2 - 1$$

$$= (x-1)(y+1)^2 + (y+1)^2 - 2(x-1)(y+1) + (x-1) - 2(y+1),$$

de unde, obţinem că

$$|f(x,y) - 1| \leq |x-1|\,|y+1|^2 + |y+1|^2 + 2|x-1|\,|y+1| + |x-1| + 2|y+1|$$

$$< \delta^3 + \delta^2 + 2\delta^2 + \delta + 2\delta.$$

Vom alege $0 < \delta \leq 1$, astfel că $\delta^3 \leq \delta^2 \leq \delta$, deci

$$|f(x,y) - 1| < 7\delta.$$

Prin urmare, dacă $7\delta < \varepsilon$, atunci inegalitatea $|f(x,y) - 1| < \varepsilon$ are loc. În concluzie, am găsit $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$ cu proprietatea că oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, cu $\|(x,y) - (1,-1)\| < \delta$, rezultă că $|f(x,y) - 1| < \varepsilon$, adică $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = 1$.

**Exerciţiul 4.2.7** Să se arate că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Rezolvare. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ este $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Observăm că $(0,0)$ nu aparţine lui $D$, dar este punct de acumulare pentru $D$. Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in D$ ce satisface $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ să rezulte $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, adică dacă $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ atunci $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$. Folosind inegalitatea $x^2 \le x^2 + y^2$ obţinem:

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 |y|}{x^2+y^2} \le \frac{\left(x^2+y^2\right)|y|}{x^2+y^2} = |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Alegând $\delta = \varepsilon$ obţinem că $|f(x,y)| < \varepsilon$, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ cu $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, adică $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

**Observaţia 4.2.8** Deseori, pentru a arăta că nu există limita unei funcţii într-un punct $x_0$ se foloseşte definiţia cu şiruri a limitei. Mai exact, au loc următoarele implicaţii:
(i) Dacă există două şiruri convergente $(z_n)_{n\ge1}, (z'_n)_{n\ge1} \subset D\setminus\{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z'_n = x_0$, pentru care şirurile valorilor $(f(z_n))_{n\ge1}$, $(f(z'_n))_{n\ge1}$ au limite diferite, atunci funcţia $f$ nu are limită în punctul $x_0$.
(ii) Dacă există un şir $(z_n)_{n\ge1} \subset D\setminus\{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_0$, iar şirul valorilor $(f(z_n))_{n\ge1}$ nu are limită, atunci funcţia $f$ nu are limită în punctul $x_0$.

**Exerciţiul 4.2.9** Arătaţi că funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,;\ x = y\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x+y}{x-y},$$

nu are limită în origine.
Rezolvare. Observăm mai întâi că $(0,0)$ este punct de acumulare pentru mulţimea $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\,;\ x = y\}$. Considerăm şirul $z_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\lambda}{n}\right)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, convergent la $(0,0)$. Atunci,

$$f(z_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda},$$

de unde obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \frac{1+\lambda}{1-\lambda},$$

deci limita şirului $(f(z_n))_{n\geq 1}$ depinde de $\lambda$. Astfel, pentru $\lambda = 0$, adică $z_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, obţinem $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 1$, iar pentru $\lambda = -1$, adică $z_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$, obţinem $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Deci, am găsit două şiruri de puncte din $D\backslash\{(0,0)\}$ convergente la $(0,0)$, pentru care şirurile valorilor funcţiei converg la limite diferite. Prin urmare, funcţia $f$ nu are limită în origine.

**Exerciţiul 4.2.10** Arătaţi că funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y);\ xy \neq 0\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sin\frac{1}{xy},$$

nu are limită în $(0,1)$.
Rezolvare. Observăm mai întâi că $(0,1)$ este punct de acumulare al mulţimii $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y);\ xy \neq 0\}$. Considerăm şirul de puncte din $D\backslash\{(0,1)\}$, dat prin $z_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, şir convergent la $(0,1)$. Atunci $f(z_n) = \sin n$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar acest şir nu are limită, aşa cum am văzut în Exerciţiul 2.1.18. Deci funcţia $f$ nu are limită în punctul $(0,1)$.

**Teorema 4.2.11** *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Dacă funcţia $f$ are limită în punctul $x_0$, atunci această limită este unică.*

**Demonstraţie.** Fie $l, l' \in \mathbb{R}^q$ limite ale funcţiei $f$ în $x_0$. Atunci, conform definiţiei cu şiruri a limitei unei funcţii, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de puncte din $D\backslash\{x_0\}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$ şi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l'$. Cum limita unui şir de puncte din $\mathbb{R}^q$ este unică, rezultă că $l = l'$. ■

**Teorema 4.2.12** *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Presupunem că $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$, unde $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., q$. Atunci $f$ are limita $l = (l_1, l_2, ..., l_q)$ în punctul $x_0$ dacă şi numai dacă există*

$$\lim_{x\to x_0} f_i(x) = l_i,\ \textit{pentru orice } i = 1, 2, ..., q.$$

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de puncte din $D\backslash\{x_0\}$ convergent la $x_0$. Şirul valorilor, $(f(x_n))_{n\geq 1}$, este un şir din $\mathbb{R}^q$ şi folosim faptul că în $\mathbb{R}^q$ convergenţa unui şir de puncte este echivalentă cu convergenţa pe coordonate. Astfel, $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $l$ dacă şi numai dacă $(f_i(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $l_i$, pentru orice $i = 1, 2, ..., q$. Deci, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă şi numai dacă $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = l_i$ pentru orice $i = 1, 2, ..., q$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Exerciţiul 4.2.13** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, unde

$$f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}^3,\ f(x)=\left(\frac{\sin 3x}{x},(1+x)^{\frac{2}{x}},\frac{5^x-1}{x}\right).$$

<u>*Rezolvare*</u>. Folosind limitele fundamentale studiate în liceu,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ şi } \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0,$$

obţinem

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x},\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}},\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}\right)=\left(3,e^2,\ln 5\right).$$

**Teorema 4.2.14** (Cauchy). *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D\subseteq\mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Atunci funcţia $f$ are limită în punctul $x_0$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât, pentru orice $x',x''\in D\backslash\{x_0\}$, cu $\|x'-x_0\|<\delta$ şi $\|x''-x_0\|<\delta$, să avem*

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|<\varepsilon.$$

**Demonstraţie.** Să presupunem mai întâi că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Atunci, pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât pentru orice $x\in S(x_0,\delta)\cap D$, $x\neq x_0$, să avem $f(x)\in S\left(l,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Fie $x',x''\in S(x_0,\delta)\cap D$, $x',x''\neq x_0$. Rezultă că $f(x'),f(x'')\in S\left(l,\frac{\varepsilon}{2}\right)$, adică $|f(x')-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ şi $|f(x'')-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. De aici, utilizând inegalitatea triunghiulară, avem

$$\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\le\left|f\left(x'\right)-l\right|+\left|f\left(x''\right)-l\right|<\varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât pentru orice $x',x''\in D\backslash\{x_0\}$, cu $\|x'-x_0\|<\delta$ şi $\|x''-x_0\|<\delta$, să avem $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Pentru a arăta că funcţia $f$ are limită în punctul $x_0$ vom folosi definiţia cu şiruri a limitei funcţiei $f$ în $x_0$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de puncte din $D\backslash\{x_0\}$, convergent la $x_0$. Rezultă că există $n_\delta\in\mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_\delta$, avem $\|x_n-x_0\|<\delta$. Fie $n,m\geq n_\delta$. Atunci, $\|x_n-x_0\|<\delta$ şi $\|x_m-x_0\|<\delta$ şi, conform ipotezei, avem $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci convergent. Prin urmare, există $l\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

Mai avem de arătat că pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ din $D\setminus\{x_0\}$ convergent la $x_0$, şirul imaginilor are aceeaşi limită $l$. Fie $(x'_n)_{n\geq 1}, (x''_n)_{n\geq 1}$ două şiruri din $D\setminus\{x_0\}$, ambele convergente la $x_0$. Am arătat că există $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = l_1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = l_2$. Considerăm şirul

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, ..., x'_n, x''_n, ....$$

Evident, acest şir converge la $x_0$. Rezultă că există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), ..., f(x'_n), f(x''_n), ...$$

să conveargă la $l$. Întrucât şirurile $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ şi $(f(x''_n))_{n\geq 1}$ sunt subşiruri ale şirului de mai sus, rezultă că $l = l_1 = l_2$. ■

**Observaţia 4.2.15** Teorema lui Cauchy spune că, pentru perechi de puncte $x', x''$ din ce în ce mai apropiate de $x_0$, diferenţa dintre valorile funcţiei este din ce în ce mai mică. Cu ajutorul acestei teoreme putem demonstra existenţa limitei unei funcţii într-un punct fără a cunoaşte efectiv limita.

**Exerciţiul 4.2.16** Să se arate că există limita

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}.$$

*Rezolvare*. Pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, trebuie să determinăm $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in \mathbb{R}^*$, cu $|x'| < \delta$ şi $|x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, unde $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Folosind faptul că $|\sin x| \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$|f(x') - f(x'')| = \left|(x')^2 \sin\frac{1}{x'} - (x'')^2 \sin\frac{1}{x''}\right| \leq |x'|^2 \left|\sin\frac{1}{x'}\right| + |x''|^2 \left|\sin\frac{1}{x''}\right|$$

$$\leq |x'|^2 + |x''|^2 < 2\delta^2.$$

Alegând $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ obţinem că $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Prin urmare, conform Criteriului lui Cauchy, limita există.

**Propoziţia 4.2.17** *Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Presupunem că $f$ şi $g$ au limită în $x_0$ şi există o vecinătate $V$ a lui $x_0$ astfel încât $f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$. Atunci*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

**Demonstraţie.** Vom folosi definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset D\backslash\{x_0\}$ convergent la $x_0$. Atunci există $n_V \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n \in V$, pentru orice $n \geq n_V$. Prin urmare, avem

$$f(x_n) \leq g(x_n), \text{ pentru orice } n \geq n_V,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} g(x_n).$$

Demonstraţia este încheiată. ■

### Operaţii cu funcţii cu limită

**Teorema 4.2.18** *Fie funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}^q$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$. Presupunem că există*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \text{ şi } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2.$$

*Atunci există:*

$$\text{(i)} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2;$$

$$\text{(ii)} \lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda l_1, \text{ pentru orice } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\text{(iii)} \lim_{x\to x_0} \langle f(x), g(x)\rangle = \langle l_1, l_2\rangle.$$

*Dacă $q = 1$, adică $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, şi $l_2 \neq 0$, atunci există*

$$\text{(iv)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

**Demonstraţie.** Aplicăm definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset D\backslash\{x_0\}$ convergent la $x_0$. Conform ipotezei, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l_1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_2$. Folosind regulile de calcul cu şiruri convergente, avem:

$\lim\limits_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l_1 + l_2;$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda f(x_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda l_1;$

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle = \left\langle \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n), \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)\right\rangle = \langle l_1, l_2\rangle;$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{g(x_n)} = \dfrac{l_1}{l_2},$

de unde se obţin proprietăţile (i), (ii), (iii) şi (iv). ■

Aceste reguli de calcul pot fi aplicate în cazul funcţiilor polinomiale şi raţionale care sunt definite în $x_0$. Mai exact, limita unei funcţii polinomiale sau raţionale este chiar valoarea acesteia în punctul $x_0$.

**Exemplul 4.2.19** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} \dfrac{x-xy^2+1}{-2xy+y^3} = \dfrac{0-0\cdot(-1)^2+1}{-2\cdot 0\cdot(-1)+(-1)^3} = -1.$

**Teorema 4.2.20** *Fie funcţiile $f : E \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel încât $\varphi(D) \subset E$ şi $x_0 \in \mathbb{R}^p$ un punct de acumulare al mulţimii $D$. Dacă există*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0,$$

*$y_0$ este punct de acumulare pentru $E$, $\varphi(x) \neq y_0$ pentru $x \neq x_0$ şi există*

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = z_0,$$

*atunci există*

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ\varphi)(x) = z_0.$$

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset D\backslash\{x_0\}$ un şir convergent la $x_0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$ rezultă că şirul $(\varphi(x_n))_{n\geq 1}$ converge la $y_0$. Mai departe, cum $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = z_0$, iar şirul $y_n = \varphi(x_n)$ converge la $y_0$, $y_n \neq y_0$, rezultă că şirul $(f(y_n))_{n\geq 1}$ converge la $y_0$. Am arătat că, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset D\backslash\{x_0\}$ convergent la $x_0$ are loc

$$\lim_{n\to\infty} (f\circ\varphi)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = z_0.$$

Deci, $\lim\limits_{x\to x_0} (f\circ\varphi)(x) = z_0$. ■

**Exemplul 4.2.21** $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5,$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin\dfrac{x}{xy+1} = \sin 0 = 0.$

**Exerciţiul 4.2.22** Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Deoarece numitorul $x^2+y^2$ tinde la zero când $(x,y)\to(0,0)$, nu putem aplica direct Teorema 4.2.18. În acest caz vom scrie

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+4-4}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

**Exerciţiul 4.2.23** Să se calculeze

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

*Rezolvare*. Deoarece numitorul $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ are limita nulă în origine, nu putem aplica direct Teorema 4.2.18. În acest caz vom scrie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)}{x-y} \cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = 0.$$

**Exerciţiul 4.2.24** Să se calculeze limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}.$$

*Rezolvare*. Arătăm mai întâi că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$. Pentru aceasta vom face următoarele majorări:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y|\left|x^2-xy+y^2\right|}{x^2+y^2} \leq (|x|+|y|)\frac{\left|x^2+y^2\right|+|xy|}{x^2+y^2} \\ &= (|x|+|y|)\left(1+\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) \leq \frac{3}{2}(|x|+|y|), \end{aligned}$$

deoarece $x^2+y^2 > 2|x||y|$. Trecând la limită, obţinem

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}(|x|+|y|) = 0,$$

deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$. Revenind la funcţia iniţială, vom folosi limita fundamentală $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ şi vom scrie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left( \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

**Limite laterale**

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. Dacă $x_0$ este punct de acumulare pentru mulţimea $D_1 = D \cap (-\infty, x_0)$, atunci vom spune că $x_0$ este *punct de acumulare la stânga* pentru $D$. Similar, dacă $x_0$ este punct se acumulare pentru mulţimea $D_2 = D \cap (x_0, +\infty)$, atunci vom spune că $x_0$ este *punct de acumulare la dreapta* pentru $D$.

**Definiţia 4.2.25** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0$ un punct de acumulare la stânga pentru mulţimea $D$. Spunem că funcţia $f$ are *limită la stânga în punctul* $x_0$, egală cu $l_s$, dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l_s$ există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât, pentru orice $x \in U \cap D_1$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Notăm

$$l_s = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) \text{ sau } l_s = \lim_{x\uparrow x_0} f(x).$$

**Definiţia 4.2.26** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0$ un punct de acumulare la dreapta pentru mulţimea $D$. Spunem că funcţia $f$ are *limită la dreapta în punctul* $x_0$, egală cu $l_d$, dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l_d$ există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât, pentru orice $x \in U \cap D_2$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Notăm

$$l_d = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \text{ sau } l_d = \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Limitele la stânga şi la dreapta într-un punct se numesc *limite laterale*.

**Exerciţiul 4.2.27** Să se calculeze limitele laterale în $x_0 = 0$ ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|\sin x|}{x}.$$

Rezolvare. Avem

$$l_s = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

şi

$$l_d = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Observăm că, în acest exemplu, limitele laterale sunt diferite.

**Teorema 4.2.28** *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0$ un punct de acumulare bilateral pentru mulţimea $D$. Funcţia $f$ are limită în punctul $x_0$ dacă şi numai dacă există atât limita la stânga $l_s$ cât şi limita la dreapta $l_d$ în punctul $x_0$ pentru $f$ şi $l_s = l_d$. În acest caz cele trei limite sunt egale, adică*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_s = l_d.$$

**Demonstraţie.** Să presupunem că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Atunci, dacă în definiţia limitei reţinem punctele $x$ pentru care $x < x_0$, rezultă $l_s = l$ şi respectiv, dacă reţinem punctele $x$ pentru care $x > x_0$, obţinem $l_d = l$.

Reciproc, să presupunem că există $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ şi $l_s = l_d$. Vom arăta că există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, unde $l = l_s = l_d$. Fie $V$ o vecinătate a lui $l$. Conform definiţiilor limitelor laterale $l_s$ şi $l_d$, există $U_1$ şi $U_2$ vecinătăţi ale lui $x_0$ astfel încât, pentru orice $x \in (U_1 \cap D_1) \cup (U_2 \cap D_2)$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Fie $U = U_1 \cap U_2$ vecinătate a lui $x_0$. Atunci, pentru orice $x \in U \cap D \subseteq (U_1 \cap D_1) \cup (U_2 \cap D_2)$ avem $f(x) \in V$, adică există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. ■

**Simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$**

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, cu $D \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru $D$.

**Definiţia 4.2.29** Spunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $0 < |x - x_0| < \delta$, să avem $f(x) > \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.30** Spunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon < 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $0 < |x - x_0| < \delta$, să avem $f(x) < \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.31** Spunem că $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x > \delta$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.32** Spunem că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta < 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x < \delta$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.33** Spunem că $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x > \delta$, să avem $f(x) > \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.34** Spunem că $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon < 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x > \delta$, să avem $f(x) < \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.35** Spunem că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta < 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x < \delta$, să avem $f(x) > \varepsilon$.

**Definiţia 4.2.36** Spunem că $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ dacă, pentru orice $\varepsilon < 0$ există $\delta < 0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D$, cu $x < \delta$, să avem $f(x) < \varepsilon$.

Pentru noţiunile introduse mai sus are loc următoarea caracterizare cu şiruri.

**Teorema 4.2.37** *Funcţia* $f : D \to \mathbb{R}$, *cu* $D \subseteq \mathbb{R}$, *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *în punctul* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\geq 1} \subset D \setminus \{x_0\}$ *convergent la* $x_0$ *şirul valorilor* $(f(x_n))_{n\geq 1}$ *converge la* $l$.

## 4.3 Funcţii continue

Fie o funcţie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru $D$. În secţiunile precedente am văzut că, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, atunci nu neapărat $f(x_0) = l$, adică valoarea funcţiei în punctul $x_0$ poate să difere de limita funcţiei în $x_0$, dacă aceasta există. În cazul în care cele două sunt egale, adică dacă $x \in D$ se apropie din ce în ce mai mult de $x_0 \in D$, atunci valorile funcţiei $f(x)$ se apropie din ce în ce mai mult de $f(x_0)$, atunci vom spune că funcţia $f$ este continuă în $x_0$.

**Definiţia 4.3.1** Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, este *continuă în punctul* $x_0 \in D$ dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $f(x_0)$ există o vecinătate $U$ a punctului $x_0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in U \cap D$, să avem $f(x) \in V$.

**Definiţia 4.3.2** O funcţie se numeşte *discontinuă în punctul* $x_0 \in D$ dacă nu este continuă în acest punct.

**Observaţia 4.3.3** Continuitatea unei funcţii se studiază numai în punctele mulţimii de definiţie a funcţiei.

**Teorema 4.3.4** *Fie* $f : D \to \mathbb{R}^q$, *unde* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, *şi* $x_0 \in D$. *Atunci* $f$ *este continuă în punctul* $x_0$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele situaţii:*
(i) *sau* $x_0$ *este punct de acumulare pentru* $D$ *şi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

(ii) *sau* $x_0$ *este punct izolat pentru mulţimea* $D$.

**Demonstraţie.** Să presupunem că $f$ este continuă în $x_0$ şi $x_0$ este punct de acumulare pentru $D$. Atunci, pentru orice vecinătate $V$ a lui $f(x_0)$ există o vecinătate $U$ a punctului $x_0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D \cap U$, să avem $f(x) \in V$. Cu atât mai mult, pentru orice $x \in U \cap D \setminus \{x_0\}$ avem $f(x) \in V$, ceea ce spune că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Reciproc, să presupunem mai întâi că $x_0$ este punct izolat pentru $D$. Atunci există o vecinătate $U$ a lui $x_0$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$. Deci, pentru orice vecinătate $V$ a lui $f(x_0)$, dacă $x \in U \cap D$, atunci $f(x) = f(x_0) \in V$, adică $f$ este continuă în $x_0$. Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare pentru $D$, folosind definiţia cu vecinătăţi a limitei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pentru orice $V$ vecinătate a lui $f(x_0)$ există $U$ vecinătate a lui $x_0$ astfel încât, oricare ar fi $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$. Cum şi pentru $x = x_0$ are loc $f(x_0) \in V$, rezultă că $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, adică $f$ este continuă în $x_0$. ■

**Teorema 4.3.5** *Fie* $f : D \to \mathbb{R}^q$, *unde* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, *şi* $x_0 \in D$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $f$ *este continuă în* $x_0$;
(ii) *pentru orice sferă deschisă* $S(f(x_0), \varepsilon)$ *există o sferă deschisă* $S(x_0, \delta)$ *astfel încât pentru orice* $x \in S(x_0, \delta) \cap D$ *să avem* $f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon)$;
(iii) *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in D$, *cu* $\|x - x_0\| < \delta$, *să avem* $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$;
(iv) *pentru orice şir* $(x_n)_{n \geq 1} \subset D$ *cu* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, *rezultă că* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

**Demonstraţie.** Teorema se demonstrează uşor folosind Teorema 4.3.4 şi teorema de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct (Teorema 4.2.3). ■

**Definiţia 4.3.6** Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$. Spunem că $f$ este *continuă pe o mulţime* $E \subseteq D$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii $E$.

**Operaţii cu funcţii continue**

**Teorema 4.3.7** *Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $f$ şi $g$ sunt continue în $x_0$, atunci sunt continue în $x_0$ şi funcţiile $f + g$, $\lambda f$, $\langle f, g\rangle$; în plus, când $q = 1$ şi $g(x) \neq 0$, este continuă şi funcţia $\frac{f}{g}$.*

**Demonstraţie.** Teorema se demonstrează uşor folosind caracterizarea cu şiruri a continuităţii. ■

**Teorema 4.3.8** (Continuitatea funcţiilor compuse). *Fie $f : E \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ şi $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel încât $\varphi(D) \subset E$ şi fie $x_0 \in D$. Dacă $\varphi$ este continuă în $x_0$ şi $f$ este continuă în $y_0 = \varphi(x_0)$ atunci funcţia compusă $f \circ \varphi : D \to \mathbb{R}^s$ este continuă în $x_0$.*

**Demonstraţie.** Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de puncte din $D$ convergent la $x_0$. Deoarece $\varphi$ este continuă în $x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0)$. Mai departe, cum $f$ este continuă în $\varphi(x_0)$ obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi(x_n)) = f(\varphi(x_0))$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (f \circ \varphi)(x_n) = (f \circ \varphi)(x_0)$, ceea ce spune că funcţia compusă $f \circ \varphi$ este continuă în $x_0$. ■

**Exemplul 4.3.9** Funcţia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată prin $g(x, y) = \sin\left(x^2 - y + 1\right)$, este continuă pe tot domeniul de definiţie, deoarece este compunerea funcţiilor continue $\varphi(x, y) = x^2 - y + 1$ (funcţie polinomială) şi $f(z) = \sin z$ (funcţie trigonometrică).

**Exerciţiul 4.3.10** Să se studieze continuitatea în punctul $(0, 0)$ a funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{ dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

<u>*Rezolvare*</u>. Calculăm mai întâi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$. Pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ avem

$$0 \leq |f(x, y)| = |xy| \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |xy|,$$

de unde rezultă că

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0,$$

adică $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Cum $f(0,0) = 0$, rezultă că funcţia $f$ este continuă în origine.

**Exerciţiul 4.3.11** Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4},\ \text{dacă}\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0,\ \text{dacă}\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*Rezolvare*. Funcţia $f$ este continuă pe mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind un raport de funcţii continue. Rămâne să studiem continuitatea funcţiei $f$ în origine. Pentru aceasta, considerăm şirul $z_n = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent la $(0,0)$. Atunci $f(z_n) = f\left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \dfrac{1}{2}$. Dar $f(0,0) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, ceea ce arată că funcţia dată nu este continuă în origine.

**Teorema 4.3.12** *Fie $f : D \to \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$. Atunci $f$ este continuă în punctul $x_0 \in D$ dacă şi numai dacă funcţiile $f_i : D \to \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0$, pentru orice $i = 1, 2, ..., q$.*

**Demonstraţie.** Funcţia $f$ este continuă în $x_0$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Dar egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ are loc dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x_0)$, pentru orice $i = 1, 2, ..., q$ (conform Teoremei 3.5.8). Deci, $f$ este continuă în $x_0$ dacă şi numai dacă, pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset D$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x_0)$, pentru orice $i = 1, 2, ..., q$, adică funcţiile $f_i$, $i = 1, 2, ..., q$, sunt continue în $x_0$. ■

**Exerciţiul 4.3.13** Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\right),\ \text{dacă}\ (x,y) \neq (0,0) \\ \left(\dfrac{1}{2}, 0\right),\ \text{dacă}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

în punctul $(0,0)$, unde $D$ este domeniul maxim de definiţie al funcţiei.
<u>*Rezolvare*</u>. Pentru a avea sens radicalul $\sqrt{1-x^2-y^2}$, trebuie ca $x^2+y^2-1 \leq 0$. Deci domeniul maxim de definiţie al funcţiei este:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\},$$

adică $D$ este sfera închisă cu centrul în origine şi rază 1. Funcţia $f$ este o funcţie vectorială de două variabile, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, unde

$$f_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \text{ dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2}, \text{ dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi

$$f_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, \text{ dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Funcţia $f$ este continuă în origine dacă şi numai dacă funcţiile $f_1$ şi $f_2$ sunt continue în origine. Să studiem mai întâi continuitatea în origine a funcţiei $f_1$. Pentru aceasta, calculăm

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)}{(x^2+y^2)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \dfrac{1}{2} = f_1(0,0)$ rezultă că funcţia $f_1$ este continuă în origine. Verificăm în continuare continuitatea în origine a funcţiei $f_2$. Calculăm mai întâi limita funcţiei în origine. Au loc majorările:

$$0 \leq f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \frac{|x|^2+|y|^2}{|x|+|y|}$$

$$\leq \frac{|x|^2+|y|^2+2\,|x|\,|y|}{|x|+|y|}=\frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|\,.$$

Prin urmare,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2\,(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|)=0,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2\,(x,y)=0=f_2\,(0,0)\,.$ Deci şi funcţia $f_2$ este continuă în origine. Prin urmare, funcţia $f$ este continuă în origine.

Vom da fără demonstraţie următoarele rezultate.

**Propoziţia 4.3.14** *Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $I$, atunci mulţimea $f(I)$ este un interval.*

**Teorema 4.3.15** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $J = f(I)$. Atunci $f$ este o bijecţie de la $I$ la $J$ dacă şi numai dacă $f$ este strict monotonă. În acest caz, inversa ei $f^{-1} : J \to I$ este de asemenea strict monotonă şi continuă.*

**Teorema 4.3.16** (Weierstrass). *Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă şi $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe $D$, atunci $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe mulţimea $D$, adică există $x_m, x_M \in D$ astfel încât*

$$f\,(x_m) \leq f\,(x) \leq f\,(x_M)\,,\ \textit{pentru orice } x \in D.$$

# Capitolul 5

# Calcul diferenţial. Funcţii de o singură variabilă

## 5.1 Introducere

Să plecăm de la următoarea problemă practică. Considerăm un mobil care se deplasează pe o axă, în sensul pozitiv al axei, iar la momentul $t$ mobilul se află în punctul de pe abscisă $s(t)$. Dorim să aflăm viteza de deplasare a mobilului la momentul $t_0 > 0$, presupunând că mişcarea nu este uniformă. Pentru orice două momente $t_1, t_2 > 0$, $t_1 < t_2$, *viteza medie* a mobilului în intervalul de timp $[t_1, t_2]$ este

$$v_m = \frac{\text{distanţa parcursă}}{\text{timpul scurs}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Dacă mişcarea ar fi uniformă, atunci raportul $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ar fi constant pentru orice $t_1, t_2 > 0$, $t_1 \neq t_2$, egal cu viteza mobilului. Pe intervalul $[t_1, t_2]$ mişcarea reală va fi cu atât mai "apropiată" de mişcarea uniformă cu cât intervalul de timp este mai mic. Cu alte cuvinte, pe intervale din ce în ce mai mici, mişcarea tinde să devină uniformă. Definim astfel *viteza instantanee* a mobilului la momentul $t_0$ :

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Deci, $v(t_0)$ este limita când $t$ tinde la $t_0$ a vitezei medii a mobilului între momentele $t_0$ şi $t$, $t \neq t_0$.

Acest exemplu, ca şi altele (viteza de variaţie a temperaturii unui corp, densitatea unei bare neomogene, intensitatea curentului electric) conduc la cercetarea limitei unui raport între "creşterea funcţiei" şi "creşterea variabilei", de forma

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ când } x \to x_0;$$

modelul matematic asociat acestui tip de probleme este cunoscut sub numele de *derivată*.

## 5.2 Derivata unei funcţii

**Definiţia 5.2.1** Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, şi $x_0 \in I$.
(i) Dacă există limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.1}$$

atunci această limită se numeşte *derivata funcţiei* $f$ *în punctul* $x_0$ şi se notează cu $f'(x_0)$ sau $\frac{df}{dx}(x_0)$.
(ii) Dacă limita (5.1) există şi este finită, atunci spunem că funcţia $f$ este *derivabilă în punctul* $x_0$.
(iii) Spunem că funcţia $f$ este *derivabilă pe* $I$ dacă $f$ este derivabilă în orice punct $x$ din $I$. În acest caz, funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui punct $x \in I$ valoarea $f'(x)$ se numeşte *derivata funcţiei* $f$ *pe mulţimea* $I$.

Operaţia prin care obţinem funcţia $f'$ se numeşte operaţia de *derivare* a funcţiei $f$.

**Observaţia 5.2.2** Întrucât $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, orice punct $x \in I$ este punct de acumulare pentru $I$, deci are sens să vorbim despre limita (5.1).

**Observaţia 5.2.3** Derivata în punctul $x_0$ poate lua valorile $+\infty$ sau $-\infty$, caz în care funcţia nu este derivabilă în acest punct.

**Exemplul 5.2.4** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$, întrucât limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

există şi este finită, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. În plus, $f'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**Exemplul 5.2.5** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$, întrucât limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \dfrac{x - x_0}{2} \cos \dfrac{x + x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \dfrac{x - x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}} \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

există şi este finită, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. În plus, $f'(x) = \cos x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**Observaţia 5.2.6** Revenind la deplasarea unui mobil pe o axă, dacă $s(t)$ este legea de mişcare rectilinie neuniformă a mobilului, atunci viteza instantanee a mobilului la momentul $t_0$ este tocmai derivata funcţiei $s$ în punctul $t_0$ (în ipoteza că funcţia $s$ este derivabilă în $t_0$), adică

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

**Observaţia 5.2.7** Dacă $m(x)$ este legea de distribuţie a masei într-o bară rectilinie neomogenă, atunci derivata acestei funcţii în punctul $x_0$ reprezintă densitatea $\rho(x_0)$ a barei în punctul $x_0$, adică

$$\rho(x_0) = m'(x_0).$$

**Observaţia 5.2.8** Dacă funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$, atunci graficul său are tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$. Dacă derivata este finită, atunci panta acestei tangente este egală cu derivata $f'(x_0)$. În acest caz, ecuaţia tangentei este

$$y - f(x_0) = m(x - x_0),$$

unde $m = f'(x_0)$. Dacă derivata este infinită, atunci tangenta este paralelă cu axa $Oy$.

**Exerciţiul 5.2.9** Să se găsească ecuaţia tangentei la parabola $y = x^2$ în punctul $P(1, 1)$.
<u>*Rezolvare*</u>. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Calculăm derivata funcţiei $f$ în punctul $x_0 = 1$:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul $P(1,1)$ este

$$y-1=2\left(x-1\right),$$

adică

$$2x-y-1=0.$$

**Teorema 5.2.10** *Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.*

**Demonstraţie.** Dacă funcţia $f$ este derivabilă în $x_0$, rezultă că există şi este finită

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=f'\left(x_0\right). \tag{5.2}$$

Pe de altă parte, observăm că, pentru orice $x\in I\setminus\left\{x_0\right\}$, avem egalitatea

$$f\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right).$$

Cum $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)=0$, ţinând seama de $(5.2)$, rezultă că există

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f'\left(x_0\right)\cdot 0+f\left(x_0\right)=f\left(x_0\right),$$

deci $f$ este continuă în $x_0$. ■

**Observaţia 5.2.11** Condiţia de continuitate a unei funcţii într-un punct este necesară pentru derivabilitatea ei în acel punct. Deci, dacă o funcţie nu este continuă într-un punct, atunci ea nu este derivabilă în acel punct.

**Observaţia 5.2.12** Condiţia de continuitate nu este însă şi suficientă pentru derivabilitate. Reciproca teoremei precedente este falsă, pentru că există funcţii continue într-un punct, care nu sunt derivabile în acel punct. Este cazul funcţiei din exemplul următor.

**Exemplul 5.2.13** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\left|x\right|$. Se verifică uşor că această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$. Vom arăta că $f$ nu este derivabilă în origine. Pentru aceasta, să calculăm limitele laterale:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\left|x\right|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=-1$$

şi
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Deoarece limitele laterale sunt diferite, rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, deci funcţia $f$ nu este derivabilă în origine.

Întrucât derivata este definită ca o limită, putem introduce şi noţiunile de derivată la stânga şi derivată la dreapta.

**Definiţia 5.2.14** Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, şi $x_0 \in I$ punct de acumulare la stânga pentru $I$.
(i) Dacă există limita
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{5.3}$$
atunci această limită se numeşte *derivata la stânga* a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f'_s(x_0)$.
(ii) Dacă limita (5.3) există şi este finită, atunci spunem că funcţia $f$ este *derivabilă la stânga* în punctul $x_0$.

**Definiţia 5.2.15** Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, şi $x_0 \in I$ punct de acumulare la dreapta pentru $I$.
(i) Dacă există limita
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{5.4}$$
atunci această limită se numeşte *derivata la dreapta* a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi se notează cu $f'_d(x_0)$.
(ii) Dacă limita (5.4) există şi este finită, atunci spunem că funcţia $f$ este *derivabilă la dreapta* în punctul $x_0$.

**Observaţia 5.2.16** Dacă funcţia $f$ este definită pe un interval închis $I = [a, b]$, atunci $f$ are derivată în punctul $a$ dacă şi numai dacă are derivată la dreapta în $a$ ($f'(a) = f'_d(a)$); analog, $f$ are derivată în punctul $b$ dacă şi numai dacă are derivată la stânga în $b$ ($f'(b) = f'_s(b)$).

Folosind teorema de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul limitelor laterale, obţinem următorul rezultat.

**Teorema 5.2.17** *Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, şi $x_0 \in I$. Funcţia $f$ are derivată în punctul $x_0$ dacă şi numai dacă $f$ are derivate laterale egale în $x_0$. În acest caz,*

$$f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0).$$

**Operaţii cu funcţii derivabile**

Amintim în continuare câteva operaţii cu funcţii derivabile.

**Teorema 5.2.18** *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile în $x_0 \in I$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $f + g$, $\lambda f$, $fg$ sunt derivabile în $x_0$ şi avem*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{5.5}$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0), \tag{5.6}$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0). \tag{5.7}$$

*Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în $x_0$ şi avem*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{5.8}$$

**Demonstraţie.** Folosind derivabilitatea funcţiilor $f$ şi $g$ în punctul $x_0$ avem

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0),
\end{aligned}$$

deci suma $f + g$ este derivabilă în $x_0$ şi (5.5) are loc.

Relaţia (5.6) se demonstrează imediat:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0),$$

deci funcţia $\lambda f$ este derivabilă în $x_0$ şi $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

Arătăm în continuare relaţia $(5.7)$. Avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\, g(x) - f(x_0)\, g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\, g(x) + f(x_0)\,[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

Am folosit faptul că funcţia $g$ este continuă în $x_0$ (fiind derivabilă în $x_0$), deci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Prin urmare, produsul $fg$ este o funcţie derivabilă în $x_0$ şi $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$.

Deoarece $g(x_0) \neq 0$ şi $g$ este continuă în $x_0$ (fiind derivabilă în $x_0$), rezultă că există o vecinătate $V$ a punctului $x_0$ astfel încât $g$ este nenulă pe $V \cap I$. Aşadar funcţia $\frac{f}{g}$ este definită cel puţin pe intervalul $V \cap I$ care conţine punctul $x_0$. Avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x)}{(x - x_0)\, g(x)\, g(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\, g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]\, f(x_0)}{(x - x_0)\, g(x)\, g(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)\right] \frac{1}{g(x)\, g(x_0)}$$

$$= \left[f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)\right] \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Deci funcţia cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în $x_0$ şi (5.8) are loc. ∎

**Teorema 5.2.19** *Fie $I, J$ două intervale ale lui $\mathbb{R}$ şi $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $u$ este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f$ este derivabilă în $u(x_0) \in J$, atunci funcţia compusă $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0$ şi are loc*

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

**Demonstraţie.** Să notăm $y_0 = u(x_0)$ şi definim funcţia $h : J \to \mathbb{R}$ prin

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, \text{ dacă } y \neq y_0 \\ f'(y_0), \text{ dacă } y = y_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Deoarece $f$ este derivabilă în $y_0$, rezultă că $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = f'(y_0)$, deci $h$ este continuă în $y_0$. Din (5.9) rezultă că

$$f(y) - f(y_0) = h(y)(y - y_0), \text{ pentru orice } y \in J,$$

sau

$$f(u(x)) - f(u(x_0)) = h(u(x))(u(x) - u(x_0)), \text{ pentru orice } x \in I.$$

De aici obţinem că, pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$,

$$\frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = h(u(x)) \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

Folosind acum derivabilitatea funcţiei $u$ în punctul $x_0$ şi continuitatea funcţiei compuse $h \circ u$ în $x_0$, rezultă că există şi este finită limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} = h(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Dar $h(u(x_0)) = h(y_0) = f'(y_0) = f'(u(x_0))$. Prin urmare, are loc egalitatea

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Demonstraţia este încheiată. ■

**Corolarul 5.2.20** *Dacă $u$ este derivabilă pe $I$ şi $f$ este derivabilă pe $J$, atunci $f \circ u$ este derivabilă pe $I$ şi are loc*

$$(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'.$$

**Exemplul 5.2.21** Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(x^2 + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Considerând funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(y) = \sin y$, şi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$, ambele derivabile pe $\mathbb{R}$, observăm că $g = f \circ u$. Conform rezultatului precedent, funcţia $g$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $g'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Cum $f'(y) = \cos y$ şi $u'(x) = 2x$, rezultă că

$$g'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x) = 2x \cos\left(x^2 + 1\right).$$

**Teorema 5.2.22** *Fie $I, J$ două intervale ale lui $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă $f$ este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi are loc*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{5.10}$$

**Demonstraţie.** Fie $y \in J$, $y \neq y_0$ şi $x = f^{-1}(y)$. Întrucât $y \neq y_0$ rezultă că $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$, adică $x \neq x_0$. Obţinem

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$
$$= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \tag{5.11}$$

Deoarece $f$ este bijectivă şi continuă pe un interval, conform Teoremei 4.3.15 rezultă că inversa ei $f^{-1}$ este continuă pe $J$. Prin urmare, făcând $y \to y_0$, rezultă că $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, adică $x \to x_0$. Deoarece $f$ este derivabilă în punctul $x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0.$$

Prin urmare, dacă $y \to y_0$ ultimul raport din relaţia (5.11) tinde la $\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Atunci primul raport din (5.11) are limită finită când $y \to y_0$, deci funcţia $f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0$ şi, în plus, are loc (5.10). ■

**Corolarul 5.2.23** *Fie $I, J$ două intervale ale lui $\mathbb{R}$ şi fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă $f$ este derivabilă pe $I$ şi $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcţia inversă $f^{-1}$ este derivabilă pe $J$ şi are loc*

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

**Exemplul 5.2.24** Fie funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, continuă şi bijectivă. În orice punct $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) = \cos x \neq 0$. Deci, conform teoremei precedente, funcţia inversă $f^{-1}(y) = \arcsin y$ este derivabilă pe $(-1, 1)$. În plus, dacă $y_0 = \sin x_0 \in (-1, 1)$, unde $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Am folosit identitatea $\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$ şi faptul că, pentru $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x_0 > 0$. În concluzie,

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \text{ pentru orice } y \in (-1, 1).$$

**Proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile**

**Definiţia 5.2.25** Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0 \in I$.
(i) Spunem că $x_0$ este *punct de maxim local* al funcţiei $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $x_0$ astfel încât

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

(ii) Spunem că $x_0$ este *punct de minim local* al funcţiei $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $x_0$ astfel încât

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

(iii) Punctele de maxim şi minim local ale funcţiei $f$ se numesc *puncte de extrem local* ale lui $f$.

**Teorema 5.2.26** (Teorema lui Fermat). *Fie $I$ un interval deschis al lui $\mathbb{R}$ şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă:*
(i) *$x_0 \in I$ este punct de extrem local al funcţiei $f$,*
(ii) *$f$ este derivabilă în $x_0$,*
*atunci $f'(x_0) = 0$.*

**Demonstraţie.** Să presupunem că $x_0$ este punct de maxim local al funcţiei $f$. Atunci, există $V$ o vecinătate a punctului $x_0$ astfel încât

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ pentru orice } x \in V.$$

De aici, rezultă că, pentru $x \in V$ cu $x < x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{5.12}$$

iar pentru $x \in V$ cu $x > x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{5.13}$$

Deoarece intervalul $I$ este deschis, putem vorbi de ambele derivate laterale în punctul $x_0 \in I$. Prin trecere la limită în (5.12) şi (5.13), obţinem

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

şi
$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$
Dar, cum $f$ este derivabilă în $x_0$, rezultă că
$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0).$$
Prin urmare, $f'(x_0) = 0$. Teorema se demonstrează analog dacă $x_0$ este punct de minim. ■

**Observaţia 5.2.27** Teorema lui Fermat dă o condiţie necesară, dar nu şi suficientă pentru existenţa punctelor de extrem. Este posibil ca într-un punct din interval derivata să se anuleze, fără ca punctul respectiv să fie punct de extrem. De exemplu, pentru funcţia $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(0) = 0$, dar punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local al funcţiei $f$ pentru că $f$ este strict crescătoare.

**Definiţia 5.2.28** Fie $I$ un interval deschis al lui $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $I$. Un punct $x_0 \in I$ în care $f'(x_0) = 0$ se numeşte *punct staţionar* sau *punct critic*.

**Observaţia 5.2.29** Dacă intervalul $I$ nu este deschis şi punctul de extrem $x_0 \in I$ coincide cu o extremitate a intervalului, este posibil ca derivata lui $f$ să nu se anuleze în $x_0$. Să considerăm, de exemplu, funcţia $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Punctul $x_0 = 1$ este punct de maxim, deoarece $f(x) - f(1) = x^2 - 1 \leq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, dar $f'(1) = 2 \neq 0$.

**Observaţia 5.2.30** Din punct de vedere geometric, Teorema lui Fermat are următoarea interpretare: în condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa $Ox$.

**Teorema 5.2.31** (Teorema lui Rolle). *Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă:*
(i) *$f$ este continuă pe $[a,b]$,*
(ii) *$f$ este derivabilă pe $(a,b)$,*
(iii) *$f(a) = f(b)$,*
*atunci există un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

**Demonstraţie.** Dacă funcţia $f$ este constantă pe $[a,b]$, atunci derivata ei este nulă în orice punct, deci, orice punct $c \in (a,b)$ satisface $f'(c) = 0$.

Să presupunem acum că $f$ nu este constantă. Deoarece $f$ este continuă pe intervalul compact $[a,b]$, conform Teoremei lui Weierstrass (Teorema 4.3.16), rezultă că $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile. Prin urmare, există $x_m, x_M \in [a,b]$ astfel încât, pentru orice $x \in [a,b]$, să avem

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M),$$

deci punctele $x_m$ şi $x_M$ sunt puncte de extrem ale funcţiei $f$. În plus, deoarece $f$ nu este constantă,

$$f(x_m) < f(x_M).$$

Distingem două cazuri:
I. Dacă $x_m \in (a,b)$, atunci, conform Teoremei lui Fermat, avem $f'(x_m) = 0$, deci am găsit $c = x_m \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.
II. Dacă $x_m \in \{a,b\}$, atunci $f(a) = f(b) = f(x_m) < f(x_M)$. Rezultă că $x_M \notin \{a,b\}$. Deci, $x_M \in (a,b)$ şi, conform Teoremei lui Fermat, avem $f'(x_M) = 0$, deci am găsit $c = x_M \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$. ■

**Observaţia 5.2.32** Teorema lui Rolle are următoarea interpretare geometrică: dacă graficul funcţiei continue $f$ pe $[a,b]$ admite tangentă în fiecare punct din $[a,b]$ cu excepţia, eventual, a extremităţilor şi dacă dreapta ce uneşte extremităţile graficului este paralelă cu axa $Ox$, atunci există cel puţin un punct al graficului (care nu coincide cu extremităţile) în care tangenta este paralelă cu axa $Ox$.

**Observaţia 5.2.33** Dacă una din cele trei condiţii ale teoremei nu este îndeplinită, atunci concluzia Teoremei lui Rolle poate să nu aibă loc. De exemplu,
(i) funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ continuă doar pe $(0,1]$, este derivabilă pe $(0,1)$ şi satisface $f(0) = f(1)$; însă $f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (0,1)$;
(ii) funcţia $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$, este continuă pe $[-1,1]$, $f(-1) = f(1)$, dar derivata $f'$, definită pe $(-1,1) \setminus \{0\}$, nu se anulează;
(iii) funcţia $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, este continuă pe $[0,1]$, derivabilă pe $(0,1)$, dar $f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (0,1)$; observăm că $f(0) \neq f(1)$.

**Observaţia 5.2.34** Punctul $c$ din Teorema lui Rolle nu este unic. Pot exista mai multe puncte în intervalul $(a,b)$ în care derivata lui $f$ se anulează. De exemplu, derivata funcţiei $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, se anulează în punctele $c_1 = \dfrac{\pi}{2}$ şi $c_2 = \dfrac{3\pi}{2}$.

**Teorema 5.2.35** (Teorema lui Cauchy). *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *două funcţii cu următoarele proprietăţi:*
(i) $f, g$ *sunt continue pe* $[a,b]$;
(ii) $f, g$ *sunt derivabile pe* $(a,b)$;
(iii) $g'(x) \neq 0$, *pentru orice* $x \in (a,b)$.
*Atunci există un punct* $c \in (a,b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.14}$$

**Demonstraţie.** Mai întâi să observăm că $g(a) \neq g(b)$. Într-adevăr, dacă $g(a) = g(b)$ atunci funcţia $g$ satisface condiţiile Teoremei lui Rolle, prin urmare există $c \in (a,b)$ astfel încât $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza (iii). Definim funcţia $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ prin

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este ales astfel încât $h(a) = h(b)$, adică

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{5.15}$$

Să observăm că funcţia $h$ cu $\lambda$ definit prin (5.15) verifică ipotezele Teoremei lui Rolle. Prin urmare, există $c \in (a,b)$ astfel încât $h'(c) = 0$, adică $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$, de unde rezultă că

$$\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

care, împreună cu (5.15), demonstrează relaţia (5.14). ■

**Exerciţiul 5.2.36** Să se demonstreze inegalitatea:

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Rezolvare. Vom utiliza Teorema lui Cauchy. Fie $y > 0$. Considerăm funcţiile $f, g : [0,y] \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ şi $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Observăm că aceste funcţii satisfac condiţiile Teoremei lui Cauchy pe intervalul $[0,y]$. Prin urmare, există un punct $c \in (0,y)$ astfel încât

$$\frac{f(y) - f(0)}{g(y) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

adică
$$\frac{(1+y)\ln(1+y)}{\operatorname{arctg} y} = \frac{1+\ln(1+c)}{\frac{1}{1+c^2}},$$
de unde obţinem că
$$\operatorname{arctg} y = \frac{(1+y)\ln(1+y)}{(1+c^2)\left[1+\ln(1+c)\right]} < (1+y)\ln(1+y)$$
şi inegalitatea este demonstrată.

Următoarea teoremă este o consecinţă a Teoremei lui Cauchy.

**Teorema 5.2.37** (Teorema lui Lagrange). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*. Dacă:*
(i) $f$ *este continuă pe* $[a,b]$,
(ii) $f$ *este derivabilă pe* $(a,b)$,
*atunci există un punct* $c\in(a,b)$ *astfel încât*
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{5.16}$$

**Demonstraţie.** Fie funcţia $g(x)=x,\ x\in[a,b]$, derivabilă pe $[a,b]$. Avem $g'(x)=1$ pentru orice $x\in[a,b]$, deci $g'\neq 0$ pe $[a,b]$. Perechea de funcţii $f$ şi $g$ satisface condiţiile Teoremei lui Cauchy, prin urmare există $c\in(a,b)$ astfel încât
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$
ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Observaţia 5.2.38** Teorema lui Lagrange se mai numeşte *teorema creşterilor finite* sau *teorema de medie.*

**Observaţia 5.2.39** Din punct de vedere geometric, Teorema lui Lagrange afirmă că, dacă graficul funcţiei continue $f$ admite tangentă în fiecare punct, cu excepţia, eventual, a extremităţilor, există cel puţin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremităţile) în care tangenta este paralelă cu dreapta care uneşte extremităţile.

**Observaţia 5.2.40** Teorema lui Lagrange asigură numai existenţa punctului intermediar $c$ care satisface (5.16), fără nici o precizare asupra unicităţii.

**Consecinţe ale Teoremei lui Lagrange**

**Propoziţia 5.2.41** *Dacă funcţia $f$ are derivata nulă pe un interval $I$, atunci $f$ este constantă pe acest interval.*

**Demonstraţie.** Fie $x_0 \in I$ un punct fixat şi $x \in I \setminus \{x_0\}$ un punct arbitrar. Aplicând Teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$), rezultă că există $c \in (x_0, x)$ (sau $c \in (x, x_0)$) astfel încât

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Cum $f'(c) = 0$, rezultă că $f(x) = f(x_0)$, adică $f$ este constantă pe $I$. ∎

**Corolarul 5.2.42** *Dacă două funcţii sunt derivabile pe un interval şi derivatele lor sunt egale pe acel interval, atunci cele două funcţii diferă printr-o constantă.*

**Demonstraţie.** Dacă $f'(x) = g'(x)$, pentru orice $x \in I$, rezultă că $f'(x) - g'(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Aplicând rezultatul anterior pentru funcţia diferenţă $h = f - g$, rezultă că aceasta este o funcţie constantă. ∎

**Propoziţia 5.2.43** *Fie $f$ o funcţie derivabilă pe intervalul $I$.*
(i) *Dacă $f' > 0$ pe $I$, atunci $f$ este strict crescătoare pe $I$.*
(ii) *Dacă $f' < 0$ pe $I$, atunci $f$ este strict descrescătoare pe $I$.*
(iii) *Dacă $f' \geq 0$ pe $I$, atunci $f$ este crescătoare pe $I$.*
(iv) *Dacă $f' \leq 0$ pe $I$, atunci $f$ este descrescătoare pe $I$.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra doar punctul (i), celelalte cazuri demonstrându-se similar. Fie $x_1, x_2 \in I$ două puncte arbitrare astfel încât $x_1 < x_2$. Aplicând Teorema lui Lagrange pe $[x_1, x_2]$ rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Deoarece $f' > 0$ pe $I$, rezultă că $f'(c) > 0$, deci $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Cum $x_1 < x_2$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) > 0$, deci $f$ este o funcţie strict crescătoare pe $I$. ∎

Următoarea consecinţă a Teoremei lui Lagrange este foarte importantă în practică, deoarece ne dă un criteriu pentru stabilirea derivabilităţii unei funcţii într-un punct, precum şi o metodă de calcul a derivatei.

**Teorema 5.2.44** *Fie $f$ o funcţie continuă pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$. Dacă $f$ este derivabilă pe $I \backslash \{x_0\}$ iar derivata sa $f'$ are limită (finită sau infinită) în punctul $x_0$, atunci există derivata funcţiei $f$ şi în punctul $x_0$; în plus,*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

*Dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ este finită, atunci $f$ este derivabilă în $x_0$.*

**Demonstraţie.** Să notăm $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de puncte din $I$ astfel încât $x_n \neq x_0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ aplicăm Teorema lui Lagrange pe $[x_n, x_0]$ (sau pe $[x_0, x_n]$). Rezultă că există $c_n \in (x_n, x_0)$ (sau $c_n \in (x_0, x_n)$) astfel încât

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(c_n). \tag{5.17}$$

Deoarece $x_n < c_n < x_0$ (sau $x_0 < c_n < x_n$) şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = x_0$. Mai departe, cum $c_n \neq x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f'(c_n) = l$ şi folosind (5.17) obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = l.$$

Cum şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ este arbitrar, rezultă că există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Exerciţiul 5.2.45** Să se studieze derivabilitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \leq 1 \\ \ln x, \text{ dacă } x > 1. \end{cases}$$

*Rezolvare*. Pe intervalele $(-\infty, 1)$ şi $(1, +\infty)$ funcţia $f$ este evident derivabilă. Studiem derivabilitatea în punctul $x_0 = 1$. Să observăm mai întâi că

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = 0,$$

deci $f$ este continuă în $x_0 = 1$. Pentru orice $x \neq 1$ avem

$$f'(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x > 1, \end{cases}$$

deci,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = 1 \text{ şi } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = 1,$$

adică există $\lim_{x \to 1} f'(x) = 1$. Aplicând rezultatul anterior, rezultă că $f$ este derivabilă în $x_0 = 1$ şi $f'(1) = 1$.

**Observaţia 5.2.46** Condiţia de existenţă a limitei derivatei $f'$ în punctul $x_0$ este suficientă, nu şi necesară pentru existenţa derivatei lui $f$ în $x_0$.

**Exemplul 5.2.47** Fie funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

Pentru orice $x \neq 0$, funcţia $f$ este o compunere de funcţii derivabile, deci este derivabilă, şi $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. Pentru $x_0 = 0$ avem

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

deci $f'(0) = 0$. Prin urmare, funcţia $f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata ei, $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este dată prin

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

de unde se vede că funcţia $f'$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$. Deci, $f$ este derivabilă în origine, dar $\lim_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

### Regula lui l'Hôpital

Uneori, în cazurile de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ sau $\dfrac{\infty}{\infty}$, limitele de funcţii pot fi calculate folosind următorul rezultat:

**Teorema 5.2.48** (Regula lui l'Hôpital). *Fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare al unui interval $I$ şi funcţiile $f$ şi $g$ definite pe $I$, cu excepţia, eventual, a lui $x_0$. Dacă:*
(i) *$f$ şi $g$ sunt derivabile pe $I$, cu excepţia, eventual, a punctului $x_0$,*
(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, *unde $l = 0$ sau $l = -\infty$ sau $l = +\infty$,*
(iii) $g'(x) \neq 0$, *pentru orice $x \neq x_0$ din $I$,*
(iv) *există* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$,
*atunci există*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema în cazul $l = 0$. Să presupunem mai întâi că $x_0 \in \mathbb{R}$. Definim funcţiile $\overline{f}$ şi $\overline{g}$ pe mulţimea $I \cup \{x_0\}$ astfel

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \neq x_0 \\ 0, \text{ dacă } x = x_0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \overline{g}(x) = \begin{cases} g(x), \text{ dacă } x \neq x_0 \\ 0, \text{ dacă } x = x_0. \end{cases}$$

Avem

$$\lim_{x \to x_0} \overline{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \overline{f}(x_0),$$
$$\lim_{x \to x_0} \overline{g}(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 = \overline{g}(x_0),$$

deci funcţiile $\overline{f}$ şi $\overline{g}$ sunt continue în punctul $x_0$. În plus, în orice punct $x \neq x_0$ din $I$, funcţiile $\overline{f}$ şi $\overline{g}$ sunt derivabile şi

$$\overline{f}'(x) = f'(x) \text{ şi } \overline{g}'(x) = g'(x) \neq 0.$$

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir de puncte din $I \backslash \{x_0\}$, convergent la $x_0$. Pentru fiecare interval cu extremităţile $x_0$ şi $x_n$ aplicăm Teorema lui Cauchy funcţiilor $\overline{f}$ şi $\overline{g}$. Rezultă că există $c_n$ cuprins între $x_0$ şi $x_n$, $c_n \neq x_0$, $c_n \neq x_n$, astfel încât

$$\frac{\overline{f}(x_n) - \overline{f}(x_0)}{\overline{g}(x_n) - \overline{g}(x_0)} = \frac{\overline{f}'(c_n)}{\overline{g}'(c_n)}.$$

În plus, $\overline{g}(x_n) \neq \overline{g}(x_0)$, deci $\overline{g}(x_n) \neq 0$. Cum $\overline{f}(x_n) = f(x_n)$, $\overline{f}(x_0) = 0$, $\overline{f}'(c_n) = f'(c_n)$, $\overline{g}(x_n) = g(x_n)$, $\overline{g}(x_0) = 0$ şi $\overline{g}'(c_n) = g'(c_n)$, egalitatea precedentă devine

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

În plus, $g(x_n) \neq 0$. Deoarece $|c_n - x_0| < |x_n - x_0|$ şi $|x_n - x_0| \to 0$, rezultă că $c_n \to x_0$. Prin urmare, cum $c_n \neq x_0$, din condiţia (iv) obţinem că

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$, deci $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ fiind ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Fie acum $x_0 = +\infty$ (cazul când $x_0 = -\infty$ se tratează în mod similar). Putem presupune că $I = (a, +\infty)$, cu $a > 0$. Să considerăm funcţiile $F$ şi $G$ definite pe intervalul $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$ astfel:

$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right), \; G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right), \; 0 < y < \frac{1}{a}.$$

Să observăm că funcţiile $F$ şi $G$ se obţin compunând respectiv funcţiile $f$ şi $g$ cu funcţia $u : \left(0, \dfrac{1}{a}\right) \to (a, +\infty)$, $u(y) = \dfrac{1}{y}$. Arătăm că funcţiile $F$ şi $G$ verifică ipotezele teoremei pentru punctul $x_0 = 0$.

(i) Funcţiile $F$ şi $G$ sunt derivabile pe $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$, deoarece funcţia $u$ este derivabilă pe $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$, iar funcţiile $f$ şi $g$ sunt derivabile pe $(a, +\infty)$. Avem

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{şi} \quad G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

(ii) Fie $(y_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent la zero, astfel încât $0 < y_n < \dfrac{1}{a}$. Atunci şirul $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$, deci $f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) \to 0$ şi $g\left(\dfrac{1}{y_n}\right) \to 0$, adică $F(y_n) \to 0$ şi $G(y_n) \to 0$. Deoarece şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{y\to 0} F(y) = 0 \;\; \text{şi} \;\; \lim_{y\to 0} G(y) = 0.$$

(iii) $G'(y) \neq 0$, pentru orice $y \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right)$, deoarece $\dfrac{1}{y^2} \neq 0$ şi $g'\left(\dfrac{1}{y}\right) \neq 0$.

(iv) Avem

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{y}\right)}, \quad \text{pentru orice } y \in \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Fie $(y_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent la zero, astfel încât $0 < y_n < \dfrac{1}{a}$. Atunci şirul $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita $+\infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'\left(\dfrac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{y_n}\right)} = L,$$

prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} = L.$$

Cum şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = L.$$

Prin urmare putem aplica teorema demonstrată mai sus funcţiilor $F$ şi $G$ în punctul $x_0 = 0$. Deducem că $G(y) \neq 0$ pentru orice $y \in \left(0, \dfrac{1}{a}\right)$ şi

$$\lim_{y\to 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = L. \tag{5.18}$$

Rezultă atunci că $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, +\infty)$. Să arătăm că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. Pentru aceasta, fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir cu limita $+\infty$, $x_n > a$. Rezultă că şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ are limita zero şi, folosind (5.18), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F\left(\dfrac{1}{x_n}\right)}{G\left(\dfrac{1}{x_n}\right)} = L.$$

Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F\left(\dfrac{1}{x_n}\right)}{G\left(\dfrac{1}{x_n}\right)} = L.$$

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu limita $+\infty$ a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Exemplul 5.2.49** Să calculăm

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 3x}.$$

Luând $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$, $g(x)=\sin 3x$ şi $x_0=0$, avem: $f'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}$, $g'(x)=3\cos 3x$ şi

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{3\cos 3x}=\frac{2e^0+2e^0}{3\cos 0}=\frac{4}{3}.$$

Conform Teoremei 5.2.48,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{3\cos 3x}=\frac{4}{3}.$$

**Observaţia 5.2.50** Nu întotdeauna aplicarea regulei lui l'Hôpital ne conduce la situaţii mai avantajoase. De exemplu, calculul limitei

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

cu regula lui l'Hôpital, conduce la o "buclă infinită":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Această limită se calculează cu metode elementare, astfel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

**Observaţia 5.2.51** Pentru a calcula limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}$$

nu putem aplica regula lui l'Hôpital deoarece nu există $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$. Limita se calculează astfel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{2+\dfrac{\cos x}{x}}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

pentru că

$$0\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{1}{|x|}|\sin x|\le\frac{1}{|x|}\to 0 \text{ când } x\to+\infty.$$

**Observaţia 5.2.52** În cazurile de nedeterminare de tipul $0\cdot\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ nu există reguli de tip l'Hôpital care să fie aplicate direct şi sunt necesare unele prelucrări ale funcţiei de sub limită. Astfel, în cazul $0\cdot\infty$ se poate utiliza identitatea

$$f\cdot g=\frac{f}{\dfrac{1}{g}}$$

şi se obţine cazul $\dfrac{0}{0}$. În cazurile $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ se poate utiliza identitatea:

$$f^g=e^{\ln f^g}=e^{g\ln f}.$$

**Exemplul 5.2.53** Să calculăm

$$\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Observăm că suntem în cazul de nedeterminare $\infty\cdot 0$. Scriind

$$\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$$

obţinem cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$ şi putem aplica regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}...=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

## 5.3 Diferenţiala unei funcţii

**Definiţia 5.3.1** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in I$.
(i) Spunem că $f$ este *diferenţiabilă în punctul* $x_0$ dacă există $A \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ continuă în $x_0$, cu $\alpha(x_0) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{5.19}$$

pentru orice $x \in I$.
(ii) Spunem că $f$ este *diferenţiabilă pe* $I$ dacă $f$ este diferenţiabilă în fiecare punct din $I$.

Legătura dintre diferenţiabilitate şi derivabilitate într-un punct este stabilită în următorul rezultat.

**Teorema 5.3.2** *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă într-un punct $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă $f$ este derivabilă în $x_0$.*

**Demonstraţie.** Să presupunem că $f$ este diferenţiabilă în $x_0$. Atunci există $A \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ astfel încât are loc

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

pentru orice $x \in I$. Prin urmare, pentru $x \neq x_0$ putem împărţi ambii membri ai egalităţii prin $x - x_0$ şi obţinem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x), \text{ pentru orice } x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Rezultă că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Deci $f$ este derivabilă în $x_0$. În plus, obţinem că $f'(x_0) = A$, astfel că relaţia (5.19) poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

pentru orice $x \in I$.

Reciproc, să presupunem că funcţia $f$ este derivabilă în $x_0$. Atunci există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Definim funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \text{ pentru } x \neq x_0 \\ 0, \text{ pentru } x = x_0. \end{cases} \tag{5.20}$$

Se observă că

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 = \alpha(x_0),$$

deci $\alpha$ este continuă în punctul $x_0$. De asemenea, pentru orice $x \in I$, $x \neq x_0$, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \alpha(x)$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

adică o egalitate de tipul $(5.19)$, unde $A = f'(x_0)$ şi $\alpha$ satisface proprietăţile cerute în Definiţia 5.3.1. Bineînţeles, această egalitate este adevărată şi pentru $x = x_0$. Deci, funcţia $f$ este diferenţiabilă în punctul $x_0$. ∎

**Observaţia 5.3.3** Teorema precedentă afirmă că noţiunile de diferenţiabilitate şi derivabilitate într-un punct sunt echivalente.

**Observaţia 5.3.4** Dacă $f$ este diferenţiabilă în $x_0$, atunci atât numărul real $A$ cât şi funcţia $\alpha$ din Definiţia 5.3.1 sunt unic determinate, anume, $A = f'(x_0)$, iar $\alpha$ este dată de $(5.20)$.

**Observaţia 5.3.5** Dacă $f$ este diferenţiabilă în $x_0$, atunci

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \ x \in I.$$

Membrul stâng al egalităţii reprezintă creşterea funcţiei $f$ în punctul $x_0$. Deoarece

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 = \alpha(x_0),$$

termenul $\alpha(x)(x - x_0)$ este neglijabil faţă de $f'(x_0)(x - x_0)$ atunci când diferenţa $x - x_0$ este suficient de mică. Astfel că, pentru valori ale lui $x$

suficient de aproape de $x_0$, diferenţa $f(x) - f(x_0)$ se poate aproxima prin $f'(x_0)(x - x_0)$, adică

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.21}$$

Deci, într-o vecinătate $V$ a punctului $x_0$, funcţia $f$ se poate aproxima prin funcţia polinomială de grad I,

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \; x \in V.$$

Dacă notăm $h = x - x_0$, atunci relaţia (5.21) devine

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)h,$$

pentru valori mici ale lui $h$.

**Definiţia 5.3.6** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Se numeşte *diferenţiala funcţiei $f$ în punctul $x_0$* funcţia

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; T(h) = f'(x_0)h,$$

şi se notează $T = df(x_0)$.

Deci,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R}. \tag{5.22}$$

Conform Observaţiei 5.3.5, pentru $h$ suficient de mic, avem

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq df(x_0)(h),$$

adică diferenţiala într-un punct $x_0$ aproximează creşterea funcţiei în acel punct.

**Exerciţiul 5.3.7** Pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

să se calculeze creşterea $f(x_0 + h) - f(x_0)$ şi diferenţiala $df(x_0)(h)$ şi să se compare aceste valori dacă $x_0 = 1$ şi a) $h = 1$, b) $h = 0,1$, c) $h = 0,01$.
<u>*Rezolvare*</u>. Avem

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \left[(x_0 + h)^3 - 2(x_0 + h) + 1\right] - \left[x_0^3 - 2x_0 + 1\right] \\ &= \left(3x_0^2 - 2\right)h + 3x_0h^2 + h^3 \end{aligned}$$

şi
$$df\left(x_0\right)(h) = f'\left(x_0\right)h = \left(3x_0^2 - 2\right)h,$$
de unde, pentru $x_0 = 1$ avem
$$f(1+h) - f(1) = h + 3h^2 + h^3 \text{ şi } df(1)(h) = h.$$
Atunci:
$$\text{a) } f(1+1) - f(1) = 5 \text{ şi } df(1)(1) = 1;$$
$$\text{b) } f(1+0,1) - f(1) = 0,131 \text{ şi } df(1)(0,1) = 0,1;$$
$$\text{c) } f(1+0,01) - f(1) = 0,010301 \text{ şi } df(1)(0,01) = 0,01.$$
Comparând rezultatele, se observă că, pentru variaţii mici ale argumentului, se poate aproxima creşterea funcţiei prin diferenţiala sa.

**Observaţia 5.3.8** Subliniem că derivata funcţiei $f$ în punctul $x_0$ este un număr, în timp ce diferenţiala funcţiei $f$ în punctul $x_0$ este o funcţie liniară.

Pentru funcţia identică $i(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, avem $i'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel încât
$$di(x)(h) = i'(x)h = h, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R}.$$
Convenind să notăm diferenţiala funcţiei identice, pe scurt, prin $dx$, avem
$$dx(h) = h, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R}.$$
Atunci, relaţia (5.22) poate fi scrisă sub forma
$$df\left(x_0\right)(h) = f'\left(x_0\right)dx(h), \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R},$$
sau
$$df\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)dx, \tag{5.23}$$
în sensul egalităţii funcţiilor.

**Exemplul 5.3.9** Pentru $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, avem
$$df(x) = d\sin x = \cos x dx.$$
Pentru $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, avem
$$df(x) = de^x = e^x dx.$$

Regulile de derivare se păstrează şi pentru diferenţiere.

**Teorema 5.3.10** *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile într-un punct $x_0 \in I$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci:*

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0),$$

$$d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0),$$

$$d(fg)(x_0) = g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0).$$

*Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\, df(x_0) - f(x_0)\, dg(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**Demonstraţie.** Folosind definiţia diferenţialei (5.23) şi regulile de derivare (Teorema 5.2.18), avem:

$$\begin{aligned} d(f+g)(x_0) &= (f+g)'(x_0)\, dx = \left[f'(x_0) + g'(x_0)\right] dx \\ &= f'(x_0)\, dx + g'(x_0)\, dy = df(x_0) + dg(x_0), \end{aligned}$$

$$d(\lambda f)(x_0) = (\lambda f)'(x_0)\, dx = \lambda f'(x_0)\, dx = \lambda df(x_0),$$

$$\begin{aligned} d(fg)(x_0) &= (fg)'(x_0)\, dx = \left[f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)\right] dx \\ &= g(x_0)\, f'(x_0)\, dx + f(x_0)\, g'(x_0)\, dx \\ &= g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)\, dx = \frac{\left[f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)\right]}{g^2(x_0)} dx \\ &= \frac{g(x_0)\, f'(x_0)\, dx - f(x_0)\, g'(x_0)\, dx}{g^2(x_0)} \\ &= \frac{g(x_0)\, df(x_0) - f(x_0)\, dg(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Demonstraţia este încheiată. ■

**Exerciţiul 5.3.11** Să se calculeze diferenţialele funcţiilor:

$$1)\ f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x \sin x;$$

$$2)\ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Rezolvare. Avem:

$$1)\ d\left(x\sin x\right) = \sin x dx + x d\sin x = \sin x dx + x\cos x dx$$

$$= \left(\sin x + x\cos x\right) dx.$$

$$2)\ d\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\left(x-1\right) d\left(x+1\right) - \left(x+1\right) d\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-1\right) dx - \left(x+1\right) dx}{\left(x-1\right)^2} = \frac{-2dx}{\left(x-1\right)^2}.$$

Următorul rezultat se referă la diferenţiabilitatea unei funcţii compuse.

**Teorema 5.3.12** *Fie $I, J$ două intervale deschise ale lui $\mathbb{R}$ şi $u : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă $u$ este derivabilă în $x_0 \in I$ şi $f$ este derivabilă în $u\left(x_0\right) \in J$, atunci funcţia compusă $f \circ u : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $x_0$ şi avem*

$$d\left(f \circ u\right)\left(x_0\right) = f'\left(u\left(x_0\right)\right) \cdot du\left(x_0\right). \tag{5.24}$$

**Demonstraţie.** Conform Teoremei 5.2.19, funcţia compusă $f \circ u$ este derivabilă (deci diferenţiabilă) în $x_0$ şi derivata sa în punctul $x_0$ este

$$\left(f \circ u\right)'\left(x_0\right) = f'\left(u\left(x_0\right)\right) \cdot u'\left(x_0\right).$$

Conform $(5.23)$, diferenţiala funcţiei $f \circ u$ este

$$d\left(f \circ u\right)\left(x_0\right) = \left(f \circ u\right)'\left(x_0\right) dx.$$

Rezultă că

$$d\left(f \circ u\right)\left(x_0\right) = f'\left(u\left(x_0\right)\right) \cdot u'\left(x_0\right) dx$$

şi întrucât $u$ este diferenţiabilă în $x_0$ şi diferenţiala sa este

$$du\left(x_0\right) = u'\left(x_0\right) dx,$$

obţinem formula $(5.24)$. ■

## 5.4 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

**Derivate de ordin superior**

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $I$. Putem defini o nouă funcţie $f' : I \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct din $I$ valoarea derivatei în acel punct şi ne interesează dacă funcţia $f'$ este la rândul ei derivabilă.

**Definiţia 5.4.1** Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis.
(i) Spunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *de două ori derivabilă în punctul* $x_0 \in I$ dacă $f$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului $x_0$ şi $f'$ este derivabilă în $x_0$. În acest caz, derivata lui $f'$ în punctul $x_0$ se numeşte *derivata a doua a lui* $f$ *în* $x_0$ şi se notează prin $f''(x_0)$. Deci,

$$f''(x_0) = \left(f'\right)'(x_0).$$

(ii) Spunem că $f$ este *de două ori derivabilă pe* $I$ dacă $f$ este de două ori derivabilă în fiecare punct din $I$.

**Observaţia 5.4.2** Într-o mişcare rectilinie $s = s(t)$, presupunând că $s$ este o funcţie derivabilă într-un punct $t_0$, am văzut că viteza instantanee a mobilului la momentul $t_0$ este dată de

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Dacă $s$ este de două ori derivabilă în $t_0$, atunci derivata a doua a funcţiei $s$ în $t_0$ este tocmai acceleraţia mobilului la momentul $t_0$, adică

$$s''(t_0) = v'(t_0) = a(t_0),$$

unde prin $a(t)$ am notat acceleraţia la momentul $t$.

Pentru definirea derivatelor de ordin $n \geq 2$ procedăm recurent.

**Definiţia 5.4.3** Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis.
(i) Spunem că funcţia $f$ este *de* $n$ $(n \geq 2)$ *ori derivabilă în* $x_0 \in I$ dacă $f$ este de derivabilă de $n-1$ ori pe o vecinătate a lui $x_0$ şi dacă derivata de ordinul $n-1$, notată prin $f^{(n-1)}$, este o funcţie derivabilă în $x_0$. Derivata de ordinul $n$ a funcţiei $f$ în punctul $x_0$, notată prin $f^{(n)}(x_0)$ este definită prin

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).$$

(ii) Spunem că $f$ este de $n$ *ori derivabilă pe* $I$ dacă $f$ este de $n$ ori derivabilă în fiecare punct din $I$.

**Observaţia 5.4.4** Dacă funcţia $f$ este derivabilă de $n$ ori în punctul $x_0$, rezultă că derivata de ordinul $n-1$ (precum şi derivatele de ordin mai mic decât $n-1$) există nu numai în punctul $x_0$, ci pe o întreagă vecinătate a lui $x_0$.

**Definiţia 5.4.5** Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis. Spunem că $f$ este *de clasă* $C^n$ $(n \geq 1)$ pe mulţimea $I$ dacă $f$ este de $n$ ori derivabilă pe $I$, iar derivata de ordinul $n$ este continuă pe $I$.

Vom nota cu $C^n(I)$ mulţimea tuturor funcţiilor de clasă $C^n$ pe $I$ şi cu $C^\infty(I)$ mulţimea funcţiilor derivabile de orice ordin (sau indefinit derivabile) pe $I$.

**Exemplul 5.4.6** 1) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = ce^x,\ f''(x) = ce^x, ..., f^{(n)}(x) = ce^x,\ \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

2) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x, ...$$

Deci,

$$f^{(4k)}(x) = \sin x,\ f^{(4k+1)}(x) = \cos x,$$
$$f^{(4k+2)}(x) = -\sin x,\ f^{(4k+3)}(x) = -\cos x,\ k \in \mathbb{N},$$

sau

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x,\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x,\ n \in \mathbb{N}.$$

3) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x, ...$$

Deci,

$$f^{(4k)}(x) = \cos x,\ f^{(4k+1)}(x) = -\sin x,$$
$$f^{(4k+2)}(x) = -\cos x,\ f^{(4k+3)}(x) = \sin x,\ k \in \mathbb{N},$$

sau

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x,\ f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x,\ n \in \mathbb{N}.$$

Cu ajutorul regulilor uzuale de derivare, se arată imediat, prin inducţie matematică, următorul rezultat.

**Teorema 5.4.7** *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii de $n$ ori derivabile într-un punct $x_0 \in I$. Atunci funcţiile $f + g$, $\lambda f$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$, $fg$ sunt derivabile de $n$ ori în punctul $x_0$ şi au loc următoarele egalităţi:*

$$(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0),$$

$$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0),$$

$$(fg)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\, g(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0)\, g'(x_0)$$
$$+ C_n^2 f^{(n-2)}(x_0)\, g''(x_0) + ... + f(x_0)\, g^{(n)}(x_0).$$

**Formula lui Taylor**

Să considerăm mai întâi un polinom algebric de grad $n$,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$, $a_n \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat. Ne propunem să găsim dezvoltarea acestui polinom după puterile lui $x - x_0$, adică să-l scriem sub forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n, \qquad (5.25)$$

cu $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$. Observăm că pentru $x = x_0$ obţinem coeficientul $A_0 = P(x_0)$, iar ceilalţi coeficienţi se determină prin derivări succesive ale polinomului. Astfel, avem:

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

de unde obţinem $A_1 = P'(x_0)$. Apoi,

$$P''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + ... + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

de unde $A_2 = \frac{1}{2}P''(x_0)$. În final,

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2A_n,$$

deci $A_n = \frac{1}{n!}P^{(n)}(x_0)$. Înlocuind în (5.25) obţinem

$$P(x) = P(x_0) + \frac{1}{1!}P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}P''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ ... + \frac{1}{n!} P^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n .$$

Să considerăm acum o funcţie arbitrară $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă de $n$ ori într-un punct $x_0 \in I$. Prin analogie cu $P(x)$, funcţiei $f$ îi ataşăm următorul polinom:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ x \in I,$$

pe care-l numim *polinomul Taylor de grad* $n$ ataşat funcţiei $f$ în punctul $x_0$ şi vom studia legătura dintre funcţia $f$ şi polinomul Taylor $T_n$. Din cele de mai sus, se observă că $T_n$ coincide cu $f$ dacă şi numai dacă $f$ este o funcţie polinomială de grad cel mult $n$. Definim funcţia

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \ x \in I, \tag{5.26}$$

deci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \ x \in I,$$

adică

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \ x \in I. \tag{5.27}$$

Egalitatea (5.27) se numeşte *formula lui Taylor* de ordinul $n$ corespunzătoare funcţiei $f$ în punctul $x_0$. Funcţia $R_n$, definită prin $(5.26)$, se numeşte *restul de ordinul* $n$ al formulei lui Taylor. Această funcţie ne arată în ce măsură polinomul $T_n$ aproximează funcţia $f$.

**Teorema 5.4.8** (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange). *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n + 1$ ori derivabilă pe $I$. Atunci pentru orice două puncte $x, x_0 \in I$, cu $x \neq x_0$, există un punct $\xi$ între $x$ şi $x_0$, ($\xi \in (x, x_0)$ pentru $x < x_0$ sau $\xi \in (x_0, x)$ pentru $x_0 < x$) astfel încât*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{5.28}$$

**Demonstraţie.** Vom presupunem că $x_0 < x$, celălalt caz rezolvându-se în mod similar. Să considerăm funcţia $\varphi : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ dată prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2$$
$$+ ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + A(x-t)^{n+1},$$

cu $A \in \mathbb{R}$ fixat astfel încât $\varphi(x_0) = \varphi(x)$. Cum $\varphi(x) = f(x)$ şi

$$\varphi(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+ ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + A(x-x_0)^{n+1} \tag{5.29}$$
$$= T_n(x) + A(x-x_0)^{n+1},$$

egalitatea $\varphi(x_0) = \varphi(x)$ are loc dacă şi numai dacă

$$A = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}. \tag{5.30}$$

Observăm că funcţia $\varphi$ este derivabilă pe $(x_0, x)$ şi

$$\varphi'(t) = f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - 2\frac{f''(t)}{2!}(x-t)$$
$$+ ... + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}$$
$$-A(n+1)(x-t)^n$$
$$= \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} - A(n+1)\right](x-t)^n, \ t \in [x_0, x].$$

Funcţia $\varphi$ satisface condiţiile Teoremei lui Rolle pe $[x_0, x]$, prin urmare există $\xi \in (x_0, x)$ astfel încât $\varphi'(\xi) = 0$, de unde rezultă că

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - A(n+1) = 0,$$

deci

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{5.31}$$

Din (5.30) şi (5.31) obţinem egalitatea dorită. ■

**Exercițiul 5.4.9** Să se dezvolte polinomul $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile întregi ale binomului $x - 2$.
<u>*Rezolvare*</u>. Pentru a obține dezvoltarea polinomului dat după puterile binomului $x - 2$ vom folosi formula lui Taylor cu restul lui Lagrange (5.28) pentru $x_0 = 2$, anume:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1},$$

cu $\xi$ între $x$ și 2. Calculăm $f(2) = 11$,

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \text{ deci } f'(2) = 7,$$

$$f''(x) = 6x - 4, \text{ deci } f''(2) = 8,$$

$$f'''(x) = 6, \text{ deci } f'''(2) = 6,$$

și

$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ pentru orice } n \geq 4 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

Atunci,

$$f(x) = 11 + \frac{7}{1!}(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3,$$

sau

$$f(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

**Exercițiul 5.4.10** Să se dezvolte funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, după puterile binomului $x + 1$.
<u>*Rezolvare*</u>. Vom folosi formula lui Taylor cu restul lui Lagrange (5.28) pentru $x_0 = -1$. Deoarece $f^{(n)}(x) = e^x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, obținem:

$$f(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{e \cdot 2!}(x+1)^2 + \frac{1}{e \cdot 3!}(x+1)^3$$

$$+... + \frac{1}{e \cdot n!}(x+1)^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}(x+1)^{n+1},$$

unde $\xi = -1 + \theta(x+1)$, $\theta \in (0,1)$. Deci,

$$f(x) = \frac{1}{e}\left[1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + ... + \frac{(x+1)^n}{n!}\right] +$$

$$+\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-1+\theta(x+1)},\ \theta\in(0,1).$$

Luând, în particular, $x_0 = 0$ în formula lui Taylor (5.28), obţinem următoarea teoremă.

**Teorema 5.4.11** (Formula lui Mac Laurin). *Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval deschis ce conţine punctul* $0$ *şi $f: I\to\mathbb{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe $I$. Atunci pentru orice $x\in I$ există un punct $\xi\in(0,x)$ (sau $\xi\in(x,0)$) astfel încât*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (5.32)$$

**Observaţia 5.4.12** Cum $\xi\in(0,x)$ (sau $\xi\in(x,0)$) rezultă că $\xi=\theta x$, cu $\theta\in(0,1)$, şi atunci (5.32) se poate scrie sub forma

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

**Exemplul 5.4.13** Funcţia $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, este de clasă $C^\infty$ pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(k)}(x)=e^x$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ şi orice $x\in\mathbb{R}$. În particular, $f^{(k)}(0)=1$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Aplicând formula lui Mac Laurin cu restul de ordinul $n$ acestei funcţii, obţinem

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad (5.33)$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**Exemplul 5.4.14** Funcţia $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$, este de clasă $C^\infty$ pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(2k-1)}(x)=(-1)^{k-1}\cos x$ şi $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ şi orice $x\in\mathbb{R}$, de unde $f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$ şi $f^{(2k)}(0)=0$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Aplicând formula lui Mac Laurin cu restul de ordinul $2n-1$ pentru funcţia $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$, obţinem

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x,$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**Exemplul 5.4.15** Funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, este de clasă $C^\infty$ pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ şi $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in \mathbb{R}$, de unde $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ şi $f^{(2k+1)}(0) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Aplicând formula lui Mac Laurin cu restul de ordinul $2n$ pentru funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, obţinem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \theta x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**Exemplul 5.4.16** Funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$, este de clasă $C^\infty$ pe $(-1, +\infty)$. Observăm că

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, ...,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

De aici avem

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 2,\ f^{(4)}(0) = -3!, ...,$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Aplicând formula lui Mac Laurin cu restul de ordinul $n$ pentru funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$, obţinem

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

**Exerciţiul 5.4.17** Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea

$$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}. \tag{5.34}$$

_Rezolvare_. Scriind formula lui Mac Laurin (5.33) pentru $n = 4$ şi $x = 1$, obţinem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{e^\theta}{5!},\ \theta \in (0, 1).$$

Prin urmare, eroarea comisă în aproximarea (5.34) este $\varepsilon = \dfrac{e^{\theta}}{5!}$ şi deoarece $\theta \in (0,1)$ şi $e < 3$, obţinem

$$\varepsilon < \frac{e}{5!} < \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}.$$

Deci, eroarea este mai mică decât $0,025$.

**Diferenţiale de ordin superior**

**Definiţia 5.4.18** Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi $x_0 \in I$. Spunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este *de două ori diferenţiabilă în punctul* $x_0$ dacă $f$ este derivabilă într-o vecinătate a lui $x_0$, iar derivata sa $f'$ este diferenţiabilă în $x_0$.

**Observaţia 5.4.19** Cum $f'$ este diferenţiabilă în $x_0$ dacă şi numai dacă $f'$ este derivabilă în punctul $x_0$ (vezi Teorema 5.3.2), diferenţiabilitatea de două ori a funcţiei $f$ în punctul $x_0$ este echivalentă cu derivabilitatea de două ori a funcţiei $f$ în $x_0$.

**Definiţia 5.4.20** Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis, o funcţie de două ori diferenţiabilă în punctul $x_0 \in I$. Numim *diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în $x_0$* funcţia

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)\, h^2, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R},$$

sau, pe scurt,

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)\, dx^2.$$

Prin $dx^2$ înţelegem $(dx)^2$. Amintim că $di(x) = dx(h) = h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}$, unde $i(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, este funcţia identică.

**Definiţia 5.4.21** Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval deschis.
(i) Spunem că $f$ este *de $n$ ($n \geq 2$) ori diferenţiabilă în punctul $x_0 \in I$* dacă $f$ este de $n-1$ ori derivabilă pe o vecinătate a lui $x_0$, iar derivata $f^{(n-1)}$ este diferenţiabilă în $x_0$.
(ii) Dacă $f$ este de $n$ ori diferenţiabilă în punctul $x_0$, atunci se numeşte *diferenţiala de ordinul $n$ a funcţiei $f$ în punctul $x_0$* funcţia

$$d^n f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)\, h^n, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R},$$

sau, pe scurt,

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,(dx)^n = f^{(n)}(x_0)\, dx^n.$$

**Exemplul 5.4.22** Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, este infinit derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Observăm că, pentru $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ f''(x) = \frac{2}{x^3},\ f'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}, ...,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, diferenţiala de ordinul $n$ a funcţiei $f$ într-un punct $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ este dată prin:

$$d^n f(x) = d^n\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} dx^n.$$

# Capitolul 6

# Calcul diferenţial. Funcţii de mai multe variabile

## 6.1 Derivate parţiale

Vom extinde noţiunile de derivată şi diferenţială de la funcţii de o variabilă reală la funcţii definite pe mulţimi din $\mathbb{R}^p$.

Să studiem mai întâi cazul funcţiilor de două variabile reale. Fie o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, şi să considerăm suprafaţa de ecuaţie $z = f(x, y)$, notată $(S)$. Fie $(x_0, y_0)$ un punct fixat în mulţimea $D$. Tăiem suprafaţa $(S)$ cu un plan vertical de ecuaţie $y = y_0$ după curba $(C)$ de ecuaţie $z = f(x, y_0)$. Curba $(C)$ este graficul funcţiei $g(x) = f(x, y_0)$ în planul $y = y_0$. Definim derivata parţială a funcţiei $f$ în raport cu $x$ în punctul $(x_0, y_0)$ drept derivata funcţiei $g$ în $x_0$. Aşa cum am văzut în capitolul anterior, derivata funcţiei $g$ în punctul $x_0$,

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

este tocmai panta dreptei tangente în punctul de coordonate $(x_0, y_0, g(x_0))$ la curba $(C)$ din planul $y = y_0$. În mod analog se defineşte derivata parţială a funcţiei $f$ în raport cu $y$ în $(x_0, y_0)$. Mai precis, dăm următoarea definiţie.

**Definiţia 6.1.1** Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, şi $(x_0, y_0) \in D$.
(i) Spunem că funcţia $f$ *are în punctul* $(x_0, y_0)$ *derivată parţială în raport cu variabila* $x$, dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \tag{6.1}$$

şi aceasta este finită. Valoarea limitei (6.1) se numeşte *derivata parţială a lui $f$ în raport cu $x$ în punctul* $(x_0, y_0)$ şi se notează prin

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ sau } f'_x(x_0, y_0).$$

(ii) Spunem că $f$ *are în punctul* $(x_0, y_0)$ *derivată parţială în raport cu variabila* $y$, dacă există

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \tag{6.2}$$

şi aceasta este finită. Limita (6.2) se numeşte *derivata parţială a lui $f$ în raport cu $y$ în punctul* $(x_0, y_0)$ şi se notează prin

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ sau } f'_y(x_0, y_0).$$

**Observaţia 6.1.2** Existenţa primei limite revine la derivabilitatea în punctul $x_0$ a funcţiei de o variabilă reală $g(x) = f(x, y_0)$, în timp ce existenţa celei de-a doua limite revine la derivabilitatea funcţiei de o variabilă reală $h(y) = f(x_0, y)$ în punctul $y_0$.

**Exerciţiul 6.1.3** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y - 1$$

şi punctul $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Să se calculeze derivatele parţiale ale acestei funcţii în $(2, 0)$.

*Rezolvare*. Mai întâi, $f(2, 0) = 3$. Conform Definiţiei 6.1.1 avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x, 0) - f(2, 0)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(2, y) - f(2, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{4 + 4y + 3y - 1 - 3}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{7y}{y} = 7.$$

Sau, $\frac{\partial f}{\partial x}$ se calculează considerând $y$ constant şi derivând funcţia ca şi cum ar fi o funcţie de o singură variabilă, $x$. Astfel, folosind regulile de derivare a funcţiilor de o singură variabilă, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y,$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=4+0=4.$$

Pentru a calcula $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ derivăm funcţia în raport cu $y$ ca şi cum ar fi funcţie de o singură variabilă, considerând variabila $x$ constantă. Obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+3,$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=7.$$

**Exerciţiul 6.1.4** Să se calculeze derivatele parţiale în punctul $(0,0)$ pentru funcţiile:

$$\text{a) } f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\text{b) } f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

<u>*Rezolvare*</u>. a) Vom folosi Definiţia 6.1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x,0)-f_1(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,\ \text{deci } \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)=0.$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_1(0,y)-f_1(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,\ \text{deci } \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)=0.$$

b) Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x,0)-f_2(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Calculăm limitele laterale:

$$l_s=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=-1 \text{ şi } l_d=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=1.$$

Cum $l_s\neq l_d$, rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$, deci $f_2$ nu are derivată parţială în raport cu $x$ în punctul $(0,0)$. În acelaşi mod se arată că $f_2$ nu are derivată parţială nici în raport cu $y$ în punctul $(0,0)$.

Să considerăm acum cazul general.

**Definiţia 6.1.5** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, şi punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_p) \in D$.
(i) Spunem că $f$ *are derivată parţială în raport cu variabila* $x_i$ *în punctul* $a$ dacă există

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)}{x_i - a_i} \tag{6.3}$$

şi aceasta este finită. Limita (6.3) se numeşte *derivata parţială a funcţiei* $f$ *în raport cu variabila* $x_i$ *în punctul* $a$ şi se notează

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ sau } f'_{x_i}(a).$$

(ii) Dacă $f$ are derivate parţiale în raport cu toate variabilele $x_i$, $i = 1, 2, ..., p$, în punctul $a$, spunem, pe scurt, că $f$ *are derivate parţiale în punctul* $a$.

Se observă că $f$ poate avea $p$ derivate parţiale.

**Observaţia 6.1.6** Aşa cum am văzut în cazul funcţiilor de două variabile, metoda practică de calculare a derivatelor parţiale pentru o funcţie de $p$ variabile, folosind regulile de derivare a funcţiilor de o variabilă, este următoarea: derivata parţială în raport cu o variabilă se determină derivând funcţia în raport cu acea variabilă ca şi cum ar fi o funcţie de o singură variabilă, considerând celelalte variabile constante.

**Exerciţiul 6.1.7** Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y, z) = 3x^2 y + y \cos(x + z) + e^{x+z} + \ln\left(y^2 + z^2 + 1\right).$$

*Rezolvare*. Funcţia $f$ este o funcţie de trei variabile, deci vom avea trei derivate parţiale. Astfel,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6xy - y \sin(x + z) + e^{x+z}.$$

Am derivat funcţia în raport cu $x$ ca şi cum ar fi o funcţie de o singură variabilă reală $x$, considerând variabilele $y$ şi $z$ constante. Derivata parţială în raport cu $y$ este:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3x^2 + \cos(x + z) + \frac{2y}{y^2 + z^2 + 1},$$

iar derivata parţială în raport cu $z$ este:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y\sin(x+z) + e^{x+z} + \frac{2z}{y^2+z^2+1}.$$

**Definiţia 6.1.8** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă.
(i) Spunem că $f$ *admite derivată parţială în raport cu variabila* $x_i$ *pe mulţimea* $D$ dacă $f$ are derivată parţială în raport cu variabila $x_i$ în orice punct $a \in D$.
(ii) Spunem că $f$ *admite derivate parţiale pe* $D$ dacă $f$ are derivate parţiale în orice punct $a \in D$. În acest caz se pot defini $p$ funcţii $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., p$, numite *derivatele parţiale ale funcţiei* $f$ *pe* $D$.

**Observaţia 6.1.9** Să remarcăm şi faptul că o funcţie $f$, de mai multe variabile, poate avea derivate parţiale într-un punct, fără a fi continuă în acel punct, cum se poate vedea în exemplul următor. Totuşi, dacă derivatele parţiale ale lui $f$ există pe o vecinătate a punctului dat şi sunt continue în punct, atunci $f$ este continuă în acel punct, aşa cum vom vedea în secţiunea următoare.

**Exemplul 6.1.10** Să considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

Pentru şirul $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, convergent la 0, avem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Cum $f(0,0) = 1$, rezultă că funcţia $f$ nu este continuă în punctul $(0,0)$. Vom arăta că $f$ are derivate parţiale în origine. Într-adevăr,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0$$

şi

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{y} = 0,$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

## 6.2 Diferenţiale

În continuare, vom extinde la $\mathbb{R}^p$ noţiunea de diferenţială a unei funcţii de o variabilă reală. Amintim că o funcţie de o variabilă reală $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ interval deschis, este diferenţiabilă într-un punct $a \in I$ dacă există $A \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ continuă în $a$, cu $\alpha(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \alpha(x)(x-a), \text{ pentru orice } x \in I. \tag{6.4}$$

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $p$ variabile reale. În acest cadru, observăm că egalitatea (6.4) nu mai are sens. Atunci, vom apela la produsul scalar din $\mathbb{R}^p$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, definit prin

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_p y_p,$$

unde $x = (x_1, x_2, .., x_p)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_p)$. Astfel, dacă $A$ şi $\alpha(x)$ sunt din $\mathbb{R}^p$, iar operaţia de înmulţire din (6.4) se înlocuieşte cu produsul scalar, relaţia (6.4) capătă sens. Dăm următoarea definiţie.

**Definiţia 6.2.1** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă.
(i) Spunem că funcţia $f$ este *diferenţiabilă în punctul* $a \in D$ dacă există $A \in \mathbb{R}^p$ şi o funcţie $\alpha : D \to \mathbb{R}^p$ continuă în $a$, cu $\alpha(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + \langle A, x-a \rangle + \langle \alpha(x), x-a \rangle, \text{ pentru orice } x \in D. \tag{6.5}$$

(ii) Spunem că funcţia $f$ este *diferenţiabilă pe* $D$ dacă este diferenţiabilă în orice punct $a \in D$.

Folosind definiţia produsul scalar, să dezvoltăm relaţia (6.5).
Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_p)$, $A = (A_1, A_2, ..., A_p)$ şi

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_p) = (\alpha_1(x_1, x_2, ..., x_p), \alpha_2(x_1, x_2, ..., x_p), ..., \alpha_p(x_1, x_2, ..., x_p)).$$

Relaţia (6.5) devine

$$f(x_1, x_2, .., x_p) = f(a_1, a_2, .., a_p) + A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) + ... + A_p(x_p - a_p)$$
$$+\alpha_1(x_1, x_2, .., x_p)(x_1 - a_1) + \alpha_2(x_1, x_2, .., x_p)(x_2 - a_2)$$
$$+ ... + \alpha_p(x_1, x_2, .., x_p)(x_p - a_p),$$

sau, pe scurt,

$$f(x_1, x_2, .., x_p) = f(a_1, a_2, .., a_p) + \sum_{i=1}^{p} A_i(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x_1, x_2, .., x_p)(x_i - a_i).$$

În particular, o funcţie de două variabile, $f : D \to \mathbb{R}$, cu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mulţime deschisă, este diferenţiabilă în punctul $a = (a_1, a_2) \in D$ dacă există $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ şi $\alpha_1, \alpha_2 : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue în $a$, cu $\alpha_1(a) = \alpha_2(a) = 0$, astfel încât

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(a_1, a_2) + A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2) \\ &+ \alpha_1(x_1, x_2)(x_1 - a_1) + \alpha_2(x_1, x_2)(x_2 - a_2), \end{aligned} \tag{6.6}$$

pentru orice $(x_1, x_2) \in D$.

**Teorema 6.2.2** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă într-un punct din $D$, atunci $f$ este continuă în acel punct.*

**Demonstraţie.** Dacă funcţia $f$ este diferenţiabilă în $a \in D$, rezultă că există $A \in \mathbb{R}^p$ şi $\alpha : D \to \mathbb{R}^p$ continuă în $a$, cu $\alpha(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + \langle A, x - a\rangle + \langle \alpha(x), x - a\rangle,$$

pentru orice $x \in D$. De aici, datorită proprietăţii de continuitate a produsului scalar, obţinem că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, adică funcţia $f$ este continuă în punctul $a$. ■

**Exerciţiul 6.2.3** Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

în punctul $(0, 0)$.
<u>Rezolvare</u>. Verificăm dacă funcţia $f$ este continuă în punctul $(0, 0)$. Fie şirul $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^3}\right)$, $n \geq 1$, convergent la $(0, 0)$. Pentru orice $n \geq 1$ avem

$$f(x_n, y_n) = \frac{\dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^6} + \dfrac{1}{n^6}} = \frac{n}{2},$$

deci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = +\infty$. Prin urmare, funcţia $f$ nu este continuă în $(0, 0)$, deci nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$.

Următorul rezultat stabileşte legătura dintre existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitate. Amintim că, în cazul funcţiilor de o variabilă, avem egalitatea $A = f'(x_0)$.

**Teorema 6.2.4** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul $a \in D$, atunci $f$ admite derivate parţiale în acest punct; numerele $A_i$, $i = 1, 2, ..., p$, sunt chiar derivatele parţiale:*

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \ i = 1, 2, ..., p.$$

**Demonstraţie.** Demonstrăm teorema pentru cazul $p = 2$, al funcţiilor de două variabile, demonstraţia în cazul general făcându-se prin analogie. Dacă $f$ este diferenţiabilă în $a$, atunci are loc (6.6) pentru orice $(x_1, x_2) \in D$. Luând în această egalitate $x_2 = a_2$, obţinem

$$f(x_1, a_2) = f(a_1, a_2) + A_1(x_1 - a_1) + \alpha_1(x_1, a_2)(x_1 - a_1),$$

sau, pentru $x_1 \neq a_1$,

$$\frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1} = A_1 + \alpha_1(x_1, a_2).$$

Membrul drept are limită pentru $x_1 \to a_1$, anume

$$\lim_{x_1 \to a_1}[A_1 + \alpha_1(x_1, a_2)] = A_1 + \lim_{x_1 \to a_1} \alpha_1(x_1, a_2) = A_1 + \alpha_1(a_1, a_2) = A_1.$$

Deci există şi

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1} = A_1 \in \mathbb{R},$$

adică $f$ admite derivată parţială în punctul $a$ în raport cu variabila $x_1$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = A_1.$$

În mod analog se arată că $f$ admite derivată parţială în punctul $a$ în raport cu variabila $x_2$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = A_2.$$

■

**Corolarul 6.2.5** *Dacă o funcţie nu admite derivată parţială în raport cu una din variabile, atunci ea nu este diferenţiabilă.*

**Exerciţiul 6.2.6** Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4},$$

în punctul $(0,0)$.
<u>Rezolvare</u>. Să observăm mai întâi că funcţia $f$ este continuă în origine. Verificăm în continuare dacă $f$ admite derivate parţiale în origine. Pentru aceasta vom folosi Definiţia 6.1.1. Astfel,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Cum

$$l_s=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x}=-1 \text{ şi } l_d=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{|x|}{x}=1$$

rezultă că nu există $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$, deci $f$ nu are derivată parţială în raport cu $x$ în punctul $(0,0)$. Prin urmare, $f$ nu este diferenţiabilă în punctul $(0,0)$.

**Observaţia 6.2.7** Reciproca Teoremei 6.2.4 nu are loc pentru $p>1$. Amintim că în cazul funcţiilor de o variabilă ($p=1$) are loc şi reciproca. În cazul $p>1$ este posibil ca o funcţie să admită toate cele $p$ derivate parţiale în acel punct, dar ea să nu fie diferenţiabilă.

**Exerciţiul 6.2.8** Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că $f$ are derivate parţiale în origine, dar nu este diferenţiabilă în origine.
<u>Rezolvare</u>. Arătăm mai întâi că funcţia $f$ admite derivate parţiale în origine. Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

Să presupunem prin reducere la absurd că funcţia $f$ este diferenţiabilă în $(0,0)$. Atunci există două funcţii $\alpha_1,\alpha_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue în $(0,0)$, cu

$$\alpha_1(0,0)=\alpha_2(0,0)=0,$$

astfel încât, pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

$$+\alpha_1(x,y)(x-0) + \alpha_2(x,y)(y-0),$$

adică

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \alpha_1(x,y) \cdot x + \alpha_2(x,y) \cdot y,$$

pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$. În particular, dacă $x = y \neq 0$ obţinem

$$\frac{x^2}{x^2+x^2} = \alpha_1(x,x) \cdot x + \alpha_2(x,x) \cdot x,$$

sau

$$\frac{1}{2} = (\alpha_1(x,x) + \alpha_2(x,x)) \cdot x.$$

Făcând $x \to 0$, obţinem $\frac{1}{2} = 0$, contradicţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci funcţia $f$ nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

În continuare prezentăm o condiţie suficientă de diferenţiabilitate a unei funcţii într-un punct.

**Teorema 6.2.9** (Criteriul de diferenţiabilitate). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dacă $f$ are derivate parţiale într-o vecinătate $V$ a punctului $a$ şi dacă aceste derivate parţiale sunt continue în $a$, atunci funcţia $f$ este diferenţiabilă în $a$.*

**Demonstraţie.** Demonstrăm teorema pentru cazul $p = 2$, demonstraţia în cazul general făcându-se prin analogie. Notăm în mod obişnuit variabilele cu $x$ şi $y$, iar punctul $a = (x_0, y_0)$. Pentru orice $(x,y) \in V$ avem

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y_0) - f(x_0,y_0)] + [f(x,y) - f(x,y_0)]$$

şi aplicând Teorema lui Lagrange (Teorema 5.2.37), rezultă că există $\xi$ între $x_0$ şi $x$ şi există $\eta$ între $y_0$ şi $y$ astfel încât

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta)(y-y_0),$$

echivalent cu

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0)$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0). \tag{6.7}$$

Definim funcţiile $\alpha$ şi $\beta$ prin:

$$\begin{aligned}\alpha(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \\ \beta(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\end{aligned}$$

pentru orice $(x,y) \in V \setminus \{(x_0, y_0)\}$ şi $\alpha(x_0, y_0) = \beta(x_0, y_0) = 0$. Să arătăm acum că funcţiile $\alpha$ şi $\beta$ sunt continue în $(x_0, y_0)$. Dacă $(x,y) \to (x_0, y_0)$, atunci cu atât mai mult $\xi \to x_0$ şi $\eta \to y_0$. Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue în $(x_0, y_0)$, rezultă că $\alpha(x,y) \to 0$ şi $\beta(x,y) \to 0$ când $(x,y) \to (x_0, y_0)$, deci $\alpha$ şi $\beta$ sunt continue în $(x_0, y_0)$. Înlocuind în (6.7) obţinem

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$+\alpha(x,y)(x - x_0) + \beta(x,y)(y - y_0),$$

adică $f$ este diferenţiabilă în $(x_0, y_0)$. ■

**Definiţia 6.2.10** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că $f$ este *de clasă* $C^1$ pe $D$ şi notăm $f \in C^1(D)$, dacă $f$ admite derivate parţiale continue pe $D$.

**Corolarul 6.2.11** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă $f \in C^1(D)$, atunci $f$ este diferenţiabilă pe $D$.*

**Exerciţiul 6.2.12** Să se arate că funcţia

$$f : D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 0\right\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \ln \frac{x}{y},$$

este diferenţiabilă pe $D$.
<u>*Rezolvare*</u>. Calculăm derivatele parţiale într-un punct curent $(x,y) \in D$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $D$, deci $f \in C^1(D)$. Prin urmare, $f$ este diferenţiabilă pe $D$.

**Definiţia 6.2.13** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite derivate parţiale într-un punct $a \in D$. Se numeşte *gradientul* funcţiei $f$ în $a$, notat prin $\text{grad} f(a)$, elementul din $\mathbb{R}^p$ ale cărui componente sunt valorile derivatelor parţiale ale funcţiei $f$ în punctul $a$, adică

$$\text{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Gradientul este o extindere naturală la funcţii de mai multe variabile a derivatei. În cazul $p = 1$, gradientul funcţiei $f$ în punctul $a$ este tocmai derivata funcţiei în $a$, adică $\text{grad} f(a) = f'(a)$.

**Definiţia 6.2.14** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a \in D$. Se numeşte *diferenţiala funcţiei $f$ în punctul $a$* funcţia

$$df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) h_p, \tag{6.8}$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$.

Cu ajutorul gradientului, putem scrie (6.8) sub forma

$$df(a)(h) = \langle \text{grad} f(a), h \rangle, \text{ pentru orice } h \in \mathbb{R}^p.$$

**Observaţia 6.2.15** Funcţia $df(a)$ este o aplicaţie liniară pe $\mathbb{R}^p$. Într-adevăr, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi orice $h, l \in \mathbb{R}^p$, avem:

$$\begin{aligned} df(a)(\alpha h + \beta l) &= \langle \text{grad} f(a), \alpha h + \beta l \rangle = \alpha \langle \text{grad} f(a), h \rangle + \beta \langle \text{grad} f(a), l \rangle \\ &= \alpha df(a)(h) + \beta df(a)(l). \end{aligned}$$

**Observaţia 6.2.16** Funcţiile particulare $\varphi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., p$, definite prin $\varphi_i(x) = x_i$, $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, sunt diferenţiabile în orice punct $x \in \mathbb{R}^p$ şi, pentru $i, k \in \{1, 2, ..., p\}$, avem

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Atunci, pentru $i = 1, 2, ..., p$,

$$\begin{aligned} d\varphi_i(x)(h) &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(x) h_2 + ... + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_p}(x) h_p \\ &= h_i, \text{ pentru orice } h = (h_1, h_2, ..., h_p). \end{aligned}$$

Diferenţiala funcţiei $\varphi_i$, fiind aceeaşi în orice punct $x \in \mathbb{R}^p$, convenim să o notăm pe scurt prin $dx_i$. Deci,

$$dx_i(h) = h_i, \; i = 1, 2, ..., p.$$

Atunci, relaţia (6.8) poate fi scrisă sub forma

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1(h) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2(h) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) dx_p(h),$$

sau

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) dx_p,$$

în sensul egalităţii funcţiilor, sau, dacă nu punem în evidenţă punctul $a$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p.$$

**Exerciţiul 6.2.17** Scrieţi diferenţiala funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x, y) = y \sin(x + y),$$

în punctul $a = (0, \pi)$.
*Rezolvare*. Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(x + y)$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x + y) + y \cos(x + y).$$

Observăm că $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}^2$. Prin urmare, diferenţiala există şi are expresia:

$$df(x, y) = y \cos(x + y) dx + (\sin(x + y) + y \cos(x + y)) dy.$$

În punctul $(0, \pi)$ diferenţiala este:

$$df(0, \pi) = \pi \cos \pi dx + (\sin \pi + \pi \cos \pi) dy = -\pi dx - \pi dy,$$

sau

$$df\,(0,\pi)\,(h_1,h_2) = -\pi h_1 - \pi h_2,$$

pentru orice $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

**Exemplul 6.2.18** Scrieţi diferenţiala funcţiei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f\,(x,y,z) = xy^2 + 3y^2z^3 + 2e^{xz},$$

în punctul $a = (2,1,1)$.
<u>*Rezolvare*</u>. Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y,z) = y^2 + 2ze^{xz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y,z) = 2xy + 6yz^3$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,(x,y,z) = 9y^2z^2 + 2xe^{xz}.$$

Diferenţiala funcţiei $f$ are expresia:

$$df\,(x,y,z) = \left(y^2 + 2ze^{xz}\right)dx + \left(2xy + 6yz^3\right)dy + \left(9y^2z^2 + 2xe^{xz}\right)dz.$$

În punctul $(2,1,1)$, diferenţiala funcţiei $f$ este:

$$df\,(2,1,1) = \left(1 + 2e^2\right)dx + 10dy + \left(9 + 4e^2\right)dz,$$

sau

$$df\,(2,1,1)\,(h_1,h_2,h_3) = \left(1 + 2e^2\right)h_1 + 10h_2 + \left(9 + 4e^2\right)h_3,$$

pentru orice $(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$.

## 6.3 Derivatele parţiale ale funcţiilor compuse

Să considerăm mai întâi următoarea situaţie. Fie $\Delta \subseteq \mathbb{R}^p$, $D \subseteq \mathbb{R}$ mulţimi deschise şi fie $f : \Delta \to \mathbb{R}$ o funcţie cu $p$ variabile reale şi $u : D \to \mathbb{R}^p$, $u\,(x) = (u_1\,(x), u_2\,(x), ..., u_p\,(x))$, unde $u_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,...,p$, astfel încât $u\,(D) \subseteq \Delta$. În acest caz putem defini funcţia compusă $f \circ u : D \to \mathbb{R}$.

**Teorema 6.3.1** *Dacă $f$ este diferenţiabilă pe $\Delta$ şi $u_1,...,u_p$ sunt derivabile pe $D$, atunci funcţia compusă $g = f \circ u$ este derivabilă pe $D$ şi*

$$g'\,(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot u_1'\,(x) + ... + \frac{\partial f}{\partial u_p} \cdot u_p'\,(x)\,, \tag{6.9}$$

*pentru orice $x \in D$.*

Egalitatea (6.9) poate fi scrisă şi sub forma:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + ... + \frac{\partial f}{\partial u_p} \cdot \frac{du_p}{dx}.$$

**Demonstraţie.** Demonstraţia o vom da pentru cazul $p = 2$, întrucât cazul general se rezolvă similar, scrierea fiind mai complicată. Fie $x_0 \in D$ şi notăm $u_1^0 = u_1(x_0)$, $u_2^0 = u_2(x_0)$. Deoarece $f$ este diferenţiabilă pe $\Delta$, deci şi în $(u_1^0, u_2^0) \in \Delta$, rezultă că

$$f(u_1, u_2) - f(u_1^0, u_2^0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1^0, u_2^0)(u_1 - u_1^0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1^0, u_2^0)(u_2 - u_2^0)$$

$$+\alpha(u_1, u_2)(u_1 - u_1^0) + \beta(u_1, u_2)(u_2 - u_2^0), \qquad (6.10)$$

pentru orice $(u_1, u_2) \in \Delta$, unde $\alpha, \beta$ sunt funcţii continue în $(u_1^0, u_2^0)$, cu $\alpha(u_1^0, u_2^0) = \beta(u_1^0, u_2^0) = 0$. Fie $x \in D$, $x \neq x_0$. Înlocuind în (6.10) $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$ şi împărţind apoi prin $x - x_0$, obţinem

$$\frac{f(u_1(x), u_2(x)) - f(u_1(x_0), u_2(x_0))}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1(x_0), u_2(x_0))\frac{u_1(x) - u_1(x_0)}{x - x_0}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1(x_0), u_2(x_0))\frac{u_2(x) - u_2(x_0)}{x - x_0} + \alpha(u_1(x), u_2(x))\frac{u_1(x) - u_1(x_0)}{x - x_0}$$

$$+\beta(u_1(x), u_2(x))\frac{u_2(x) - u_2(x_0)}{x - x_0}. \qquad (6.11)$$

Dacă $x \to x_0$, atunci $u_1(x) \to u_1(x_0)$ şi $u_2(x) \to u_2(x_0)$. Deoarece funcţiile $u_1$ şi $u_2$ sunt derivabile în $x_0$ şi din proprietăţile funcţiilor $\alpha$ şi $\beta$ în punctul $(u_1(x_0), u_2(x_0))$, rezultă că membrul drept al egalităţii (6.11) are limită finită când $x \to x_0$. Prin urmare şi membrul stâng are limită finită când $x \to x_0$, adică obţinem derivabilitatea funcţiei compuse $g$. Trecând la limită, avem

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1(x_0), u_2(x_0)) \cdot u_1'(x_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1(x_0), u_2(x_0)) \cdot u_2'(x_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Exemplul 6.3.2** Fie funcţia $f(u_1, u_2) = 2u_1u_2 + u_1^2$, unde $u_1(x) = \sin x$ şi $u_2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. În acest caz, $g(x) = f(u_1(x), u_2(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Folosind formula (6.9) obţinem

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2u_1 + 2u_2) \cdot \cos x + 2u_1 \cdot 1 \\ &= (2x + 2\sin x) \cdot \cos x + 2\sin x. \end{aligned}$$

Fie acum $D \subseteq \mathbb{R}^l$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi deschise şi funcţiile $u : D \to \mathbb{R}^p$, $u = (u_1, u_2, ..., u_p)$, şi $f : \Delta \to \mathbb{R}$, astfel încât $u(D) \subseteq \Delta$. Atunci funcţia compusă $g = f \circ u : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $l$ variabile:

$$g(x_1, x_2, ..., x_l) = f(u_1(x_1, x_2, ..., x_l), ..., u_p(x_1, x_2, ..., x_l)).$$

Problema existenţei derivatei parţiale în raport cu o variabilă $x_i$, $i = 1, 2, ..., l$, pentru funcţia $g$ se încadrează în rezultatul precedent dacă se consideră toate celelalte $l - 1$ variabile constante, caz în care vom avea o funcţie de o variabilă, a cărei derivată este tocmai derivata parţială $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$.

Trecând $x$ în $x_i$, $i = 1, 2, ..., l$, obţinem:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial x_i}.$$

Are loc următorul rezultat.

**Teorema 6.3.3** *Dacă $f$ este diferenţiabilă pe $\Delta$ şi $u_1, ..., u_p$ sunt diferenţiabile pe $D$, atunci funcţia compusă $g = f \circ u$ este diferenţiabilă pe $D$ şi*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) + ... + \frac{\partial f}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial x_i}(x), \ \ i = 1, 2, ..., l, \tag{6.12}$$

*pentru orice $x \in D$.*

**Exemplul 6.3.4** Fie $g = f(u_1, u_2, u_3)$, unde $u_1 = u_1(x, y)$, $u_2 = u_2(x, y)$, $u_3 = u_3(x, y)$. Suntem în cazul $p = 3$ şi $l = 2$. Avem prin compunere funcţia

$$g(x, y) = f(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y)),$$

ale cărei derivate parţiale se calculează astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial y}. \end{aligned}$$

**Exerciţiul 6.3.5** Fie $w = e^u \ln v$, unde $u = \ln(x \cos y)$, $v = x \sin y$. Să se calculeze $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ în punctul $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

*Rezolvare*. Funcţia $w$ depinde de variabilele $x, y$ prin intermediul variabilelor $u$ şi $v$. Avem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = (e^u \ln v)\cdot\frac{1}{x\cos y}\cdot\cos y + \left(\frac{e^u}{v}\right)\cdot\sin y \\
&= x\cos y\cdot\ln(x\sin y)\cdot\frac{1}{x} + x\cos y\cdot\frac{1}{x\sin y}\cdot\sin y \\
&= \cos y\cdot\ln(x\sin y)+\cos y
\end{aligned}$$

Deci,

$$\frac{\partial w}{\partial x}\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În raport cu $y$ avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = (e^u \ln v)\cdot\frac{1}{x\cos y}\cdot(-x\sin y) + \left(\frac{e^u}{v}\right)\cdot x\cos y \\
&= x\cos y\cdot\ln(x\sin y)\cdot\frac{-\sin y}{\cos y} + x\cos y\cdot\frac{1}{x\sin y}\cdot x\cos y \\
&= -x\sin y\cdot\ln(x\sin y)+\frac{x\cos^2 y}{\sin y}.
\end{aligned}$$

Deci,

$$\frac{\partial w}{\partial y}\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

## 6.4 Derivate parţiale de ordin superior

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă. Presupunem că $f$ are derivate parţiale pe $D$. Atunci, cele $p$ derivate parţiale sunt funcţii de $p$ variabile definite pe $D$ cu valori reale:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., p.$$

Acestea pot admite sau nu, la rândul lor, derivate parţiale.

**Definiţia 6.4.1** Fie $i, k \in \{1, 2, ..., p\}$.
(i) Dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ are derivată parţială în raport cu variabila $x_k$ în punctul $a \in D$, atunci aceasta se numeşte *derivată parţială de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în punctul $a$ în raport cu variabilele $x_i$ şi $x_k$* şi se notează prin

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a).$$

Dacă $i = k$ notăm

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a).$$

Pentru $i \neq k$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a)$ se numesc *derivate parţiale mixte de ordinul al doilea în punctul $a$.*
(ii) Dacă funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ are derivate parţiale pe $D$ în raport cu variabila $x_k$, atunci se obţine funcţia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} : D \to \mathbb{R},$$

numită *derivată parţială de ordinul al doilea.*
(iii) Spunem că $f$ *are derivate parţiale de ordinul al doilea pe $D$* dacă $f$ are derivate parţiale de ordinul al doilea în orice punct din $D$, în raport cu orice variabilă.

**Exerciţiul 6.4.2** Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru funcţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy^2.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea, folosind Definiţia 6.4.1:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \left(y^2\right)'_x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = (2xy)'_x = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \left(y^2\right)'_y = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (2xy)'_y = 2x.$$

Observăm că derivatele parţiale mixte coincid.

**Exerciţiul 6.4.3** Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru funcţia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \sin(x+yz).$$

<u>*Rezolvare*</u>. Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \cos(x+yz)\cdot(x+yz)'_x = \cos(x+yz),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \cos(x+yz)\cdot(x+yz)'_y = z\cos(x+yz),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos(x+yz)\cdot(x+yz)'_z = y\cos(x+yz).$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = (\cos(x+yz))'_x \\ &= -\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_x = -\sin(x+yz),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = (z\cos(x+yz))'_y \\ &= z(\cos(x+yz))'_y = -z\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_y \\ &= -z^2\sin(x+yz),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = (y\cos(x+yz))'_z \\ &= y(\cos(x+yz))'_z = -y\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_z \\ &= -y^2\sin(x+yz)\end{aligned}$$

şi derivatele parţiale mixte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = (z\cos(x+yz))'_x \\ &= z(\cos(x+yz))'_x = -z\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_x \\ &= -z\sin(x+yz),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = (\cos(x+yz))'_y \\
&= -\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_y = -z\sin(x+yz),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = (y\cos(x+yz))'_x \\
&= y(\cos(x+yz))'_x = -y\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_x \\
&= -y\sin(x+yz),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y,z) = (\cos(x+yz))'_z \\
&= -\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_z = -y\sin(x+yz),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x,y,z) = (y\cos(x+yz))'_y \\
&= 1\cdot\cos(x+yz) - y\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_y \\
&= \cos(x+yz) - yz\sin(x+yz),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) = (z\cos(x+yz))'_z \\
&= 1\cdot\cos(x+yz) - z\sin(x+yz)\cdot(x+yz)'_z \\
&= \cos(x+yz) - yz\sin(x+yz).
\end{aligned}$$

Observăm că în exemplele precedente, derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale două câte două ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$). Acest lucru nu este adevărat întotdeauna, cum se poate vedea din exerciţiul următor.

**Exerciţiul 6.4.4** Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Să se calculeze derivatele sale mixte în origine.

*Rezolvare*. Să observăm mai întâi că $f$ admite derivate parţiale în orice punct din $\mathbb{R}^2$ diferit de origine, deoarece, pe o vecinătate a unui astfel de punct, ea coincide cu o funcţie elementară. Fie $(x, y) \neq (0, 0)$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\left[y\left(x^2 - y^2\right) + 2x^2 y\right]\left(x^2 + y^2\right) - xy\left(x^2 - y^2\right) \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ &= \frac{y\left(x^4 + 4x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.\end{aligned}$$

De aici, pentru $y \neq 0$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y.$$

Această derivată parţială se poate calcula şi cu ajutorul Definiţiei 6.1.1. Derivata parţială în origine trebuie calculată cu ajutorul Definiţiei 6.1.1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1.\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x\left(y^4 + 4x^2y^2 - x^4\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \text{ pentru orice } (x, y) \neq (0, 0),$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x, \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

Derivata parţială în raport cu $y$ în $(0, 0)$ este

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1.\end{aligned}$$

Prin urmare,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Deci, există funcţii pentru care derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt diferite: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Prezentăm în continuare condiţii suficiente care asigură egalitatea derivatelor parţiale mixte de ordinul al doilea într-un punct.

**Teorema 6.4.5** (Criteriul lui Schwarz). *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, şi $a \in D$. Dacă $f$ are derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i \neq j)$ într-o vecinătate a punctului $a$ şi dacă acestea sunt continue în $a$, atunci*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema în cazul $p = 2$. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de variabile $x$ şi $y$, pentru care există derivatele mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinătate $V$ a punctului $a = (x_0, y_0)$, continue în acest punct.

Fie $(x, y) \in V$ arbitrar fixat astfel încât $x \neq x_0$ şi $y \neq y_0$. Considerăm următoarea expresie:
$$E(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0).$$

Observăm că există un interval deschis $I \subset \mathbb{R}$ ce conţine $x_0$ astfel încât, pentru orice $u \in I$, punctele $(u, y)$ şi $(u, y_0)$ aparţin lui $V$. Definim funcţia
$$\phi : I \to \mathbb{R},\ \phi(u) = f(u,y) - f(u,y_0) \tag{6.13}$$

şi observăm că
$$E(x,y) = \phi(x) - \phi(x_0).$$

Deoarece funcţia $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există pe mulţimea $V$, deci $f$ admite derivată parţială în raport cu $x$ pe $V$, rezultă că funcţia $\phi$ este derivabilă pe $I$ şi atunci $\phi$ este continuă pe $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$). Rezultă că funcţia $\phi$ satisface condiţiile

Teoremei lui Lagrange (Teorema 5.2.37) pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$). Prin urmare, există un punct $\xi \in (x_0, x)$ (sau $\xi \in (x, x_0)$) astfel încât

$$\phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi)(x - x_0).$$

Dar, din (6.13) avem

$$\phi'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0),$$

deci

$$E(x, y) = (x - x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right].$$

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, ales astfel încât $y_0 \in J$ şi pentru orice $v \in J$ punctul $(\xi, v) \in V$. Definim funcţia

$$\phi_1 : J \to \mathbb{R},\ \phi_1(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, v). \tag{6.14}$$

Observăm că $\phi_1$ satisface condiţiile Teoremei lui Lagrange pe intervalul $[y, y_0]$ (sau $[y_0, y]$) întrucât există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pe $V$. Rezultă că există un punct $\eta \in (y_0, y)$ (sau $\eta \in (y, y_0)$) astfel încât

$$\phi_1(y) - \phi_1(y_0) = \phi_1'(\eta)(y - y_0),$$

deci

$$E(x, y) = (x - x_0)[\phi_1(y) - \phi_1(y_0)] = (x - x_0)(y - y_0)\phi_1'(\eta).$$

Din (6.14) rezultă că

$$\phi_1'(\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta),$$

prin urmare, am obţinut că

$$E(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta). \tag{6.15}$$

Printr-un raţionament simetric în raport cu variabilele $x$ şi $y$ (adică definind funcţia $\varphi(v) = f(x, v) - f(x_0, v)$ şi observând că $E(x, y) = \varphi(y) - \varphi(y_0)$), găsim $\overline{\xi}$ între $x_0$ şi $x$ şi $\overline{\eta}$ între $y_0$ şi $y$ astfel încât

$$E(x, y) = (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi}, \overline{\eta}). \tag{6.16}$$

Din (6.15) şi (6.16) rezultă egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{\xi}, \overline{\eta}). \tag{6.17}$$

În final, trecem la limită în această egalitate pentru $(x, y) \to (x_0, y_0)$. În acest caz, $(\xi, \eta) \to (x_0, y_0)$ şi $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \to (x_0, y_0)$, şi folosind ipoteza că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ sunt continue în $(x_0, y_0)$, obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Definiţia 6.4.6** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă. Spunem că $f$ este *de clasă* $C^2$ pe $D$ şi notăm $f \in C^2(D)$, dacă $f$ are derivate parţiale de ordinul întâi şi al doilea continue pe $D$.

**Corolarul 6.4.7** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţime deschisă şi $f \in C^2(D)$. Atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

*pentru orice $a \in D$ şi orice $i, j = 1, 2, ..., p$.*

Deci, pentru funcţii de clasă $C^2$ ordinea de derivare nu este importantă.

**Teorema 6.4.8** (Criteriul lui Young). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă $f$ are derivate parţiale pe o vecinătate $V$ a punctului $a \in D$ şi dacă acestea sunt diferenţiabile în punctul $a$, atunci există derivatele parţiale de ordinul al doilea în punctul $a$ şi derivatele parţiale mixte sunt egale două câte două în acest punct.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema în cazul $p = 2$. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de variabile $x$ şi $y$, pentru care există derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ într-o vecinătate $V$ a punctului $a = (x_0, y_0)$, diferenţiabile în punctul $a$.

Existenţa derivatelor parţiale de ordinul al doilea rezultă din faptul că $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$, fiind diferenţiabile în $(x_0, y_0)$, ele au derivate parţiale în $(x_0, y_0)$. Fie $(x, y)$ un punct arbitrar din $V$, cu $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ şi considerăm expresia

$$E(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

Utilizând funcţia auxiliară

$$\phi(u) = f(u, y) - f(u, y_0)$$

şi repetând raţionamentul făcut în demonstraţia Criteriului lui Schwarz, rezultă că există $\xi \in (x_0, x)$ (sau $\xi \in (x, x_0)$) astfel încât

$$E(x, y) = (x - x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right].$$

Adunând şi scăzând în paranteză $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ avem

$$E(x, y) = (x - x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\right]. \tag{6.18}$$

Întrucât funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ este diferenţiabilă în punctul $(x_0, y_0)$, rezultă că există funcţiile $\alpha_1, \alpha_2 : V \to \mathbb{R}$ continue în $(x_0, y_0)$, cu $\alpha_1(x_0, y_0) = \alpha_2(x_0, y_0) = 0$, astfel încât

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (\overline{x} - x_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)$$

$$+ (\overline{y} - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) + \alpha_1(\overline{x}, \overline{y})(\overline{x} - x_0) + \alpha_2(\overline{x}, \overline{y})(\overline{y} - y_0),$$

pentru orice $(\overline{x}, \overline{y}) \in V$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (\overline{x} - x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + (\overline{y} - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$+\alpha_1(\overline{x}, \overline{y})(\overline{x} - x_0) + \alpha_2(\overline{x}, \overline{y})(\overline{y} - y_0),$$

pentru orice $(\overline{x}, \overline{y}) \in V$. Utilizând această relaţie în (6.18) obţinem

$$E(x, y) = (x - x_0)\left[(\xi - x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right.$$

$$+\alpha_1(\xi, y)(\xi - x_0) + \alpha_2(\xi, y)(y - y_0) - (\xi - x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$\left. - (y_0 - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) - \alpha_1(\xi, y_0)(\xi - x_0) - \alpha_2(\xi, y_0)(y_0 - y_0)\right],$$

de unde

$$E(x,y) = (x-x_0)\left[(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) + \alpha_1(\xi,y)(\xi-x_0)\right.$$

$$\left. +\alpha_2(\xi,y)(y-y_0) - \alpha_1(\xi,y_0)(\xi-x_0)\right]. \tag{6.19}$$

Pe de altă parte, şi funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este diferenţiabilă în punctul $(x_0,y_0)$ rezultă că există funcţiile $\beta_1,\beta_2 : V \to \mathbb{R}$ continue în $(x_0,y_0)$, cu $\beta_1(x_0,y_0) = \beta_2(x_0,y_0) = 0$, astfel încât

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (\overline{x}-x_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)$$

$$+(\overline{y}-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) + \beta_1(\overline{x},\overline{y})(\overline{x}-x_0) + \beta_2(\overline{x},\overline{y})(\overline{y}-y_0),$$

pentru orice $(\overline{x},\overline{y}) \in V$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (\overline{x}-x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + (\overline{y}-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

$$+\beta_1(\overline{x},\overline{y})(\overline{x}-x_0) + \beta_2(\overline{x},\overline{y})(\overline{y}-y_0), \tag{6.20}$$

pentru orice $(\overline{x},\overline{y}) \in V$. Folosind acum funcţia

$$\varphi(v) = f(x,v) - f(x_0,v)$$

şi făcând un raţionament similar, obţinem

$$E(x,y) = (y-y_0)\left[(x-x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + \beta_1(x,\eta)(x-x_0)\right.$$

$$\left. +\beta_2(x,\eta)(\eta-y_0) - \beta_2(x_0,\eta)(\eta-y_0)\right], \tag{6.21}$$

unde $\eta \in (y,y_0)$ (sau $\eta \in (y_0,y)$). Din (6.19) şi (6.21) obţinem egalitatea

$$\begin{aligned}
& (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) + \alpha_1(\xi,y)(\xi-x_0)(x-x_0) \\
& +\alpha_2(\xi,y)(y-y_0)(x-x_0) - \alpha_1(\xi,y_0)(\xi-x_0)(x-x_0) \\
= \; & (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + \beta_1(x,\eta)(x-x_0)(y-y_0) \\
& +\beta_2(x,\eta)(\eta-y_0)(y-y_0) - \beta_2(x_0,\eta)(\eta-y_0)(y-y_0).
\end{aligned}$$

Împărţind prin $(x-x_0)(y-y_0)$ ambii membri ai acestei egalităţi avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)+\alpha_1(\xi,y)\frac{\xi-x_0}{y-y_0}+\alpha_2(\xi,y)-\alpha_1(\xi,y_0)\frac{\xi-x_0}{y-y_0} \\ = \;&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)+\beta_1(x,\eta)+\beta_2(x,\eta)\frac{\eta-y_0}{x-x_0}-\beta_2(x_0,\eta)\frac{\eta-y_0}{x-x_0}. \end{aligned}$$

Să considerăm acum un şir $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$, cu $x_n\neq x_0$, $y_n\neq y_0$, astfel încât $x_n-x_0=y_n-y_0$, pentru orice $n\geq 1$. Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct $(x_n,y_n)$ există $\xi_n$ cuprins între $x_0$ şi $x_n$, deci

$$|\xi_n-x_0|\leq|x_n-x_0|,$$

şi $\eta_n$ cuprins între $y_0$ şi $y_n$, deci

$$|\eta_n-y_0|\leq|y_n-y_0|,$$

astfel încât

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)+(\alpha_1(\xi_n,y_n)-\alpha_1(\xi_n,y_0))\frac{\xi_n-x_0}{y_n-y_0}+\alpha_2(\xi_n,y_n) \\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)+\beta_1(x_n,\eta_n)+(\beta_2(x_n,\eta_n)-\beta_2(x_0,\eta_n))\frac{\eta_n-y_0}{x_n-x_0}. \end{aligned}\tag{6.22}$$

Deoarece $x_n\to x_0$ şi $y_n\to y_0$, rezultă că $\xi_n\to x_0$ şi $\eta_n\to y_0$, şi folosind continuitatea funcţiilor $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ în $(x_0,y_0)$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_1(\xi_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_1(\xi_n,y_0)=\alpha_1(x_0,y_0)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_2(\xi_n,y_n)=\alpha_2(x_0,y_0)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_1(x_n,\eta_n)=\beta_1(x_0,y_0)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_2(x_n,\eta_n)=\lim_{n\to\infty}\beta_2(x_0,\eta_n)=\beta_2(x_0,y_0)=0.$$

Cum

$$\left|\frac{\xi_n-x_0}{y_n-y_0}\right|=\left|\frac{\xi_n-x_0}{x_n-x_0}\right|\leq 1 \text{ şi } \left|\frac{\eta_n-y_0}{x_n-x_0}\right|=\left|\frac{\eta_n-y_0}{y_n-y_0}\right|\leq 1,$$

rezultă că

$$\left|(\alpha_1(\xi_n,y_n)-\alpha_1(\xi_n,y_0))\frac{\xi_n-x_0}{y_n-y_0}\right|\leq|\alpha_1(\xi_n,y_n)|+|\alpha_1(\xi_n,y_0)|\to 0,$$

$$\left|\left(\beta_2\left(x_n,\eta_n\right)-\beta_2\left(x_0,\eta_n\right)\right)\frac{\eta_n-y_0}{x_n-x_0}\right|\leq\left|\beta_2\left(x_n,\eta_n\right)\right|+\left|\beta_2\left(x_0,\eta_n\right)\right|\to 0.$$

Trecând la limită în egalitatea (6.22) rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x_0,y_0\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Corolarul 6.4.9** *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D\subseteq\mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă. Dacă toate derivatele parţiale ale funcţiei $f$ există şi sunt diferenţiabile pe $D$, atunci există toate derivatele parţiale de ordinul al doilea, iar cele mixte sunt egale două câte două pe $D$.*

Din Criteriul lui Young rezultă un criteriu asemănător cu Criteriul lui Schwarz.

**Corolarul 6.4.10** *Fie $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D\subseteq\mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, şi $a\in D$. Dacă toate derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ există pe o vecinătate $V$ a punctului $a$ şi dacă sunt continue în $a$, atunci derivatele parţiale mixte sunt egale două câte două în punctul $a$.*

**Demonstraţie.** Derivatele parţiale de ordinul întâi, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,p$, având derivate parţiale pe o vecinătate $V$ a lui $a$, continue în punctul $a$, conform Criteriului de diferenţiabilitate (Teorema 6.2.9), sunt funcţii diferenţiabile în punctul $a$. Prin urmare, conform Criteriului lui Young, derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale două câte două în punctul $a$. ■

Derivatele parţiale de ordinul $n\geq 2$ ale funcţiei $f$ se definesc recurent, ca derivatele parţiale de ordinul întâi ale derivatelor parţiale de ordin $n-1$. Fie $a\in D$. Atunci,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}}(a)=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}}...\partial x_{i_1}}\right)(a),$$

unde $i_1,i_2,...,i_n\in\{1,2,...,p\}$. De exemplu, prin $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}$ vom înţelege derivata parţială în raport cu variabila $x_i$ a derivatei parţiale de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}$.

**Exerciţiul 6.4.11** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = x^5 + xy^2z^2 + z^4.$$

Să se calculeze $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$ şi $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y^2 \partial x \partial z^2}$.

<u>*Rezolvare*</u>. Conform definiţiei,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x, y, z), \text{ iar } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(x, y, z).$$

Calculăm mai întâi

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xy^2z + 4z^3.$$

Rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \left(2xy^2z + 4z^3\right)'_z = 2xy^2 + 12z^2,$$

deci,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z) = \left(2xy^2 + 12z^2\right)'_x = 2y^2.$$

Conform definiţiei,

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y^2 \partial x \partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial z^2}\right)(x, y, z),$$

iar

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}\right)(x, y, z) = \left(2y^2\right)'_y = 4y.$$

Rezultă că

$$\frac{\partial^5 f}{\partial y^2 \partial x \partial z^2}(x, y, z) = (4y)'_y = 4.$$

**Observaţia 6.4.12** Rezultate asemănătoare Teoremelor 6.4.5 şi 6.4.8 sunt valabile pentru derivatele parţiale de ordin superior:

1. Dacă mai multe derivate parţiale mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, există pe o vecinătate a punctului $a$ şi sunt continue în $a$, atunci aceste derivate sunt egale în $a$.
2. Dacă derivatele parţiale de ordinul $n - 1$ există pe o vecinătate $V$ a punctului $a$ şi sunt diferenţiabile în $a$, atunci există toate derivatele parţiale de ordinul $n$ în punctul $a$ şi derivatele mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, sunt egale în punctul $a$.

## 6.5 Diferenţiale de ordin superior

**Definiţia 6.5.1** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă.
(i) Spunem că $f$ este *diferenţiabilă de două ori în punctul* $a \in D$ dacă $f$ are derivate parţiale într-o vecinătate $V$ a lui $a$ şi acestea sunt diferenţiabile în punctul $a$.
(ii) Spunem că $f$ este *diferenţiabilă de două ori pe* $D$ dacă este diferenţiabilă de două ori în orice punct $a \in D$.

**Observaţia 6.5.2** Din Criteriul lui Young (Teorema 6.4.8) rezultă că, dacă $f$ este diferenţiabilă de două ori în punctul $a \in D$, atunci există toate derivatele parţiale de ordinul al doilea în punctul $a$, iar derivatele parţiale mixte nu depind de ordinea de derivare.

**Propoziţia 6.5.3** *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, şi $a \in D$. Dacă $f$ are derivate parţiale de ordinul al doilea pe o vecinătate $V$ a lui $a$ şi dacă acestea sunt continue în $a$, atunci $f$ este de două ori diferenţiabilă în $a$.*

**Demonstraţie.** Deoarece $f$ are derivate parţiale de ordinul al doilea pe $V$, evident, există derivatele parţiale de ordinul întâi pe $V$. În plus, aceste derivate parţiale de ordinul întâi au derivate parţiale pe $V$, care sunt continue în $a$. Conform Criteriului de diferenţiabilitate (Teorema 6.2.9) rezultă că derivatele parţiale de ordinul întâi sunt diferenţiabile în $a$, deci $f$ este diferenţiabilă de două ori în punctul $a$. ■

Amintim că pentru o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă într-un punct $a \in D$ are loc egalitatea

$$df\,(a)\,(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,(a)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(a)\,h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}\,(a)\,h_p,$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$. Ţinând seama de Definiţia 6.5.1, este naturală următoarea definiţie a diferenţialei de ordinul al doilea a unei funcţii într-un punct.

**Definiţia 6.5.4** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori diferenţiabilă în $a \in D$. Se numeşte *diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în punctul $a$* funcţia

$$d^2 f\,(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j, \;\; h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p. \qquad (6.23)$$

**Observaţia 6.5.5** În formula (6.23) derivatele parţiale mixte sunt egale în baza Criteriului lui Young (vezi Observaţia 6.5.2).

**Observaţia 6.5.6** Pentru scrierea membrului drept al egalităţii (6.23) putem folosi următoarea notaţie:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p} h_p\right]^{(2)} (a)$$

sau, pe scurt,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i\right]^{(2)} (a).$$

Expresia din paranteza pătrată se ridică formal la puterea (simbolică) a doua, prin "produsul" dintre $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ şi $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ în punctul $a$ înţelegând $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Astfel, putem scrie

$$d^2 f(a)(h) = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i\right]^{(2)} (a).$$

Folosind faptul că

$$dx_i(h) = h_i, \;\; i = 1, 2, ..., p,$$

diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în punctul $a$ se poate scrie sub forma

$$d^2 f(a) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i dx_j, \qquad (6.24)$$

sau

$$d^2 f(a) = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right]^{(2)}.$$

**Observaţia 6.5.7** Funcţia $d^2f(a)$ este o formă pătratică. Matricea asociată acestei forme pătratice

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1\le i,j\le n}$$

se numeşte *matricea hessiană* a funcţiei $f$ în punctul $a$ şi este o matrice simetrică.

**Exemplul 6.5.8** Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$. Diferenţiala de ordinul al doilea într-un punct $a \in D$ are expresia:

$$d^2f(a)(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\,h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,h_2^2,$$

sau

$$d^2f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,dy^2. \tag{6.25}$$

De asemenea, putem nota

$$d^2f(a)(h_1, h_2) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,h_2\right]^{(2)},$$

prin produsul dintre $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ în punctul $a$ înţelegând $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

**Exemplul 6.5.9** În cazul unei funcţii de trei variabile, $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y, z)$, avem

$$d^2f(a)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\,h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\,h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)\,h_3^2$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\,h_1 h_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a)\,h_2 h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a)\,h_1 h_3.$$

**Exerciţiul 6.5.10** Găsiţi expresia diferenţialei de ordinul al doilea a funcţiei $f(x, y) = x^2 y^3$ în punctul $(1, -1)$.
*Rezolvare*. Pentru a scrie diferenţiala de ordinul al doilea a funcţiei $f$ în punctul $(1, -1)$ folosim formula (6.25) :

$$d^2f(1, -1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1)\,dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1)\,dy^2.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \left(2xy^3\right)'_x = 2y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3x^2y^2\right)'_x = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \left(3x^2y^2\right)'_y = 6x^2y$$

şi, în punctul $(1,-1)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = -6.$$

Prin urmare,

$$d^2 f(1,-1) = -2dx^2 + 12dxdy - 6dy^2.$$

**Definiţia 6.5.11** Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă. Spunem că $f$ este *de $n$ ($n \geq 2$) ori diferenţiabilă în punctul* $a \in D$ dacă $f$ are derivate parţiale de ordinul $n-1$ pe o vecinătate $V$ a punctului $a$ şi acestea sunt diferenţiabile în $a$.

**Propoziţia 6.5.12** *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, şi $a \in D$. Dacă $f$ are derivate parţiale de ordinul $n$ pe o vecinătate $V$ a lui $a$ şi dacă acestea sunt continue în $a$, atunci $f$ este de $n$ ori diferenţiabilă în punctul $a$.*

**Definiţia 6.5.13** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n$ ori diferenţiabilă în punctul $a \in D$. *Diferenţiala de ordinul $n$ a funcţiei $f$ în punctul* $a$ este funcţia

$$d^n f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},$$

definită prin

$$d^n f(a)(h) = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i\right]^{(n)},$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$, sau

$$d^n f(a) = \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i\right]^{(n)},$$

ridicarea la puterea $n$ înţelegându-se în sensul convenţiei anterioare referitoare la ”produs”.

## Formula lui Taylor

**Teorema 6.5.14** (Formula lui Taylor). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n+1$ ori diferenţiabilă pe $D$. Fie $a \in D$ şi $S(a,r)$ o sferă deschisă inclusă în $D$. Atunci, pentru orice $x \in S(a,r)$ există un punct $\xi$ aparţinând segmentului determinat de punctele $a$ şi $x$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a) \\ &+ ... + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi)(x-a). \end{aligned} \tag{6.26}$$

**Demonstraţie.** Vom face demonstraţia pentru cazul $p = 2$. Fie $a = (x_0, y_0)$ şi $(x, y) \in S(a, r)$. Considerăm funcţiile $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$, definite prin

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t(x - x_0) \\ y(t) &= y_0 + t(y - y_0) \end{aligned}$$

şi definim funcţia compusă $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)).$$

Deoarece $x$ şi $y$ sunt diferenţiabile de orice ordin pe $[0,1]$ şi $f$ este diferenţiabilă de $n+1$ ori pe $D$, funcţia compusă $\varphi$ este diferenţiabilă de $n+1$ ori pe $[0,1]$. Aplicând funcţiei $\varphi$ formula lui Mac Laurin (5.32) obţinem:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(0) + ... + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\tau),$$

unde $\tau$ este între 0 şi $t$. Pentru $t = 1$ obţinem

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + ... + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\tau), \tag{6.27}$$

unde $\tau \in (0,1)$. Calculăm derivatele funcţiei $\varphi$. Avem

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot (y - y_0), \end{aligned}$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), y(t)) \cdot (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t), y(t)) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\cdot\left(y-y_0\right)^2$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\cdot\left(y-y_0\right)\right]^{(2)}$$

şi, în general, pentru $k=1,2,...,n+1$,

$$\varphi^{(k)}\left(t\right)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\cdot\left(y-y_0\right)\right]^{(k)}.$$

Prin urmare,

$$\varphi\left(1\right)=f\left(x,y\right),$$

$$\varphi\left(0\right)=f\left(x_0,y_0\right),$$

$$\begin{aligned}\varphi'\left(0\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)\\ &= df\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''\left(0\right) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)\right]^{(2)}\\ &= d^2f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right),\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}\left(0\right) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(y-y_0\right)\right]^{(n)}\\ &= d^nf\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}\left(\tau\right) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(\tau),y(\tau))\cdot\left(x-x_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(\tau),y(\tau))\cdot\left(y-y_0\right)\right]^{(n+1)}\\ &= d^{n+1}f\left(x\left(\tau\right),y\left(\tau\right)\right)\left(x-x_0,y-y_0\right).\end{aligned}$$

Înlocuindu-le în (6.27) obţinem

$$f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{1!}df\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right)$$

$$+\frac{1}{2!}d^2f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right)+...+\frac{1}{n!}d^nf\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0,y-y_0\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)(x-x_0,y-y_0),$$

unde $\xi = x_0 + \tau(x - x_0)$ şi $\eta = y_0 + \tau(y - y_0)$, adică tocmai formula (6.26) în cazul $p = 2$. ■

Formula (6.26) poartă numele de *formula lui Taylor de ordinul* $n$ pentru funcţii de mai multe variabile, iar polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a)$$

se numeşte *polinomul lui Taylor de grad* $n$ *asociat funcţiei* $f$ *în punctul* $a$.

## 6.6 Extremele funcţiilor de mai multe variabile

**Definiţia 6.6.1** Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, şi $a \in D$.
(i) Punctul $a$ se numeşte *punct de maxim local* al funcţiei $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

(ii) Punctul $a$ se numeşte *punct de minim local* al funcţiei $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât

$$f(x) - f(a) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

(iii) Punctele de maxim şi minim local se numesc *puncte de extrem local*.

**Observaţia 6.6.2** Punctul $a$ este punct de extrem local dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(a)$ să păstreze semn constant sau să fie nulă pe $V \cap D$.

**Definiţia 6.6.3** Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a$. Punctul $a \in D$ se numeşte *punct critic* (*staţionar*) pentru funcţia $f$ dacă toate derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f$ se anulează în $a$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \text{ pentru orice } i = 1, 2, ..., p.$$

**Observaţia 6.6.4** Punctul $a \in D$ este punct critic pentru $f$ dacă şi numai dacă

$$df(a) = 0.$$

Şi în cazul funcţiilor de mai multe variabile avem o proprietate analoagă celei exprimate de Teorema lui Fermat de la funcţii de o variabilă (Teorema 5.2.26).

**Teorema 6.6.5** (Teorema lui Fermat). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $a \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă $f$ este diferenţiabilă în $a$ şi $a$ este punct de extrem local pentru $f$, atunci $df\,(a) = 0$.*

**Demonstraţie.** Vom demonstra teorema în cazul $p = 2$. Fie $a = (x_0, y_0) \in D$ un punct de maxim local pentru funcţia $f$. Deci, există o vecinătate $V$ a punctului $(x_0, y_0)$ astfel încât

$$f\,(x, y) - f\,(x_0, y_0) \leq 0, \text{ pentru orice } (x, y) \in V \cap D.$$

Fără a restrânge generalitatea, putem considera $V \subseteq D$, întrucât mulţimea $D$ este o mulţime deschisă. În particular, are loc

$$f\,(x, y_0) - f\,(x_0, y_0) \leq 0,$$

pentru orice $x \in V_1$, unde $V_1$ este restricţia vecinătăţii $V$ pentru $y$ egal cu $y_0$, adică

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R};\ (x, y_0) \in V\},$$

deci $V_1$ este o vecinătate a punctului $x_0$. De aici rezultă că funcţia de o singură variabilă $g : V_1 \to \mathbb{R}$, definită prin $g\,(x) = f\,(x, y_0)$, satisface inegalitatea

$$g\,(x) - g\,(x_0) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in V_1,$$

adică $x_0$ este punct de maxim pentru $g$. Cum $g$ este derivabilă în $x_0$, conform Teoremei lui Fermat de la funcţii de o variabilă, rezultă că $g'\,(x_0) = 0$. Dar

$$g'\,(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g\,(x) - g\,(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f\,(x, y_0) - f\,(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)\,.$$

În concluzie, am obţinut că $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0) = 0$. În mod analog, se arată că $\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0) = 0$. ■

**Observaţia 6.6.6** Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile se găsesc printre punctele sale critice, adică printre soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,(x_1, x_2, ..., x_p) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}\,(x_1, x_2, ..., x_p) = 0. \end{cases}$$

**Observaţia 6.6.7** Reciproca acestei teoreme este falsă. Nu orice punct critic este punct de extrem, cum se poate vedea din exemplul următor.

**Exemplul 6.6.8** Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Avem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ şi obţinem că punctul $(0, 0)$ este punct critic. Dar, în $(0, 0)$ funcţia nu are nici minim local, nici maxim local, deoarece

$$f(x, 0) - f(0, 0) = x^2 \geq 0,$$

iar

$$f(0, y) - f(0, 0) = -y^2 \leq 0.$$

**Definiţia 6.6.9** Un punct critic care nu este punct de extrem se numeşte *punct şa.*

În cele ce urmează, indicăm condiţii suficiente pentru ca un punct critic al unei funcţii de mai multe variabile să fie punct de extrem. Înainte însă vom prezenta un rezultat auxiliar.

**Lema 6.6.10** *Fie* $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ *o matrice simetrică de numere reale şi fie*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} x_i x_j$$

*forma pătratică asociată. Dacă* $P$ *este pozitiv definită, adică* $P(x) > 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, *atunci există* $m > 0$ *astfel încât, pentru orice* $x \in \mathbb{R}^p$,

$$P(x) \geq m \|x\|^2.$$

**Demonstraţie.** Fie $C = \{x \in \mathbb{R}^p;\ \|x\| = 1\}$ mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Cum $P$ este o funcţie continuă, conform Teoremei lui Weierstrass (Teorema 4.3.16), există $a \in C$ astfel încât

$$P(a) \leq P(x), \text{ pentru orice } x \in C.$$

Fie $m = P(a)$. Deci, pentru orice $y \in C$, $P(y) \geq m$. Deoarece $a \neq 0$ şi $P$ este pozitiv definită rezultă că $m = P(a) > 0$. Fie $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Atunci $y = \dfrac{x}{\|x\|} \in C$, deci $P(y) \geq m$, adică $P\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \geq m$, de unde rezultă că $P(x) \geq m \|x\|^2$. Evident, această relaţie este verificată şi pentru $x = 0$. ■

**Teorema 6.6.11** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ un punct critic pentru $f$. Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ este:*
(i) *pozitiv definită, atunci $a$ este punct de minim local;*
(ii) *negativ definită, atunci $a$ este punct de maxim local;*
(iii) *nedefinită, atunci $a$ nu este punct de extrem ($a$ este punct şa).*

**Demonstraţie.** (i) Să presupunem că forma pătratică $d^2 f(a)$ este pozitiv definită. Să notăm $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $i, j = 1, 2, ..., p$. Deoarece $f \in C^2(D)$, matricea $(\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ este simetrică, deci putem aplica lema precedentă formei pătratice $d^2 f(a)$. Rezultă că există $m > 0$ astfel încât

$$d^2 f(a)(x-a) \geq m \|x-a\|^2, \text{ pentru orice } x \in D. \tag{6.28}$$

Aplicăm formula lui Taylor (6.26) de ordinul întâi în punctul $a$. Atunci, pentru orice $x \in S(a,r) \subseteq D$ există $\xi$ pe segmentul determinat de $a$ şi $x$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi)(x-a). \tag{6.29}$$

Deoarece $a$ este punct critic, $df(a)(x-a) = 0$. Deci, relaţia (6.29) devine

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(\xi)(x-a).$$

Adunăm şi scădem $d^2 f(a)(x-a)$ şi obţinem

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) + \frac{1}{2}\left[d^2 f(\xi)(x-a) - d^2 f(a)(x-a)\right] \\ &= \frac{1}{2} d^2 f(a)(x-a) + \frac{1}{2}\alpha(x)\|x-a\|^2, \end{aligned} \tag{6.30}$$

unde funcţia $\alpha : S(a,r) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x-a\|^2}\left[d^2 f(\xi)(x-a) - d^2 f(a)(x-a)\right], \text{ dacă } x \neq a \\ 0, \text{ dacă } x = a. \end{cases}$$

Arătăm în continuare că $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Pentru $x \neq a$ avem:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\|x-a\|^2}\left[d^2 f(\xi)(x-a) - d^2 f(a)(x-a)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{\|x-a\|^2}. \end{aligned}$$

Cum

$$\frac{|(x_i - a_i)(x_j - a_j)|}{\|x-a\|^2} = \frac{|(x_i - a_i)(x_j - a_j)|}{\sum\limits_{k=1}^{p}(x_k - a_k)^2} \leq 1,$$

pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$, obţinem

$$|\alpha(x)| \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right|.$$

Deoarece $f \in C^2(D)$, deci derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f$ sunt continue pe $D$, şi pentru $x \to a$ rezultă $\xi \to a$, obţinem

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] = 0,$$

pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$. Prin urmare,

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0.$$

Din (6.30) şi (6.28) obţinem inegalitatea

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq \frac{1}{2}m\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\alpha(x)\|x-a\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|x-a\|^2(m + \alpha(x)), \end{aligned}$$

pentru orice $x \in D$. Cum $m > 0$ şi $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, rezultă că există $r_1 > 0$ astfel încât $m + \alpha(x) > 0$, pentru orice $x \in S(a, r_1) \subseteq S(a, r)$. Deci,

$$f(x) - f(a) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in S(a, r_1) \subseteq D,$$

ceea ce înseamnă că $a$ este punct de minim local pentru funcţia $f$.

(ii) Dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită, se aplică rezultatul de la punctul (i) funcţiei $-f$.

(iii) Dacă $d^2 f(a)$ este nedefinită, în orice vecinătate a punctului $a$, expresia $d^2 f(a)(x-a)$ poate lua atât valori strict pozitive cât şi valori strict negative. Din această observaţie şi din relaţia

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}d^2 f(a)(x-a) + \frac{1}{2}\alpha(x)\|x-a\|^2,$$

pentru orice $x \in S(a, r)$, rezultă că diferenţa $f(x) - f(a)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a punctului $a$. ■

**Exercițiul 6.6.12** Să se afle punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

*Rezolvare*. Aflăm mai întâi punctele critice ale funcției $f$. Pentru aceasta rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \\ 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Deci, avem un singur punct critic, anume punctul $M_0(-1,-2,3)$. Pentru a stabili dacă acest punct este punct de extrem, vom apela la diferențiala de ordinul al doilea în punctul $M_0$. În acest scop calculăm valorile derivatelor parțiale de ordinul al doilea în acest punct.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= (2x+2)'_x = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-2,3) = 2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= (2y+4)'_y = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-2,3) = 2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= (2z-6)'_z = 2, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(-1,-2,3) = 2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= (2y+4)'_x = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-2,3) = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= (2z-6)'_x = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(-1,-2,3) = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &= (2z-6)'_y = 0, \text{ deci } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1,-2,3) = 0.
\end{aligned}$$

Atunci,

$$d^2 f(-1,-2,3)(h) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 = 2\left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2\right) > 0,$$

pentru orice $h = (h_1,h_2,h_3) \neq (0,0,0)$. Deci, $d^2 f(-1,-2,3)$ este o formă pătratică pozitiv definită. Prin urmare, punctul $M_0(-1,-2,3)$ este punct de minim local. Valoarea minimă locală este

$$f_{\min} = f(-1,-2,3) = -14.$$

Ţinând seama de condiţiile lui Sylvester pentru forme pătratice (vezi [13, pag. 89]), obţinem următorul criteriu de stabilire a naturii unui punct critic.

**Teorema 6.6.13** *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f \in C^2(D)$ şi $a \in D$ un punct critic pentru $f$. Fie $H$ matricea hessiană a funcţiei $f$ în punctul $a$, adică*

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{1 \leq i,j \leq n},$$

*şi $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ minorii principali ai matricei.*
(i) *Dacă numerele $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ sunt strict pozitive, atunci forma pătratică $d^2 f(a)$ este pozitiv definită şi $a$ este punct de minim local.*
(ii) *Dacă numerele $-\Delta_1, \Delta_2, ..., (-1)^p \Delta_p$ sunt strict pozitive, atunci forma pătratică $d^2 f(a)$ este negativ definită şi $a$ este punct de maxim local.*
(iii) *Dacă numerele $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p$ sunt nenule şi nu satisfac condiţiile de la punctele* (i) *sau* (ii)*, atunci $a$ nu este punct de extem.*

**Exerciţiul 6.6.14** Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

*Rezolvare*. Determinăm punctele critice ale funcţiei $f$, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 6y - 2x = 0 \\ 4z + 2x = 0. \end{cases}$$

Soluţia unică a sistemului este $x = y = z = 0$, deci $O(0,0,0)$ este singurul punct critic al funcţiei $f$. Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea pentru a stabili dacă acesta este punct de extrem. Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0$$

şi în punctul $O\,(0,0,0)$ avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0)=-2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0)=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0)=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0)=4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0)=0.$$

Prin urmare, minorii matricei hessiene sunt:

$$\Delta_1=2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}=8,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=8.$$

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3>0$, forma pătratică $d^2 f\,(0,0,0)$ este pozitiv definită şi $O\,(0,0,0)$ este punct de minim local al funcţiei $f$.

În cazul unei funcţii reale de două variabile reale acest rezultat poate fi scris sub următoarea formă:

**Teorema 6.6.15** *Fie $D\subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $f\in C^2(D)$, $a\in D$ un punct critic pentru $f$. Notăm*

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

*Dacă:*
(i) $B^2-AC<0$ *şi* $A>0$, *atunci* $a$ *este punct de minim local;*
(ii) $B^2-AC<0$ *şi* $A<0$, *atunci* $a$ *este punct de maxim local;*
(iii) $B^2-AC>0$, *atunci* $a$ *nu este punct de extrem.*

**Observaţia 6.6.16** Dacă $B^2-AC=0$, nu putem afirma nimic despre punctul $a$. În unele cazuri $a$ este punct de extrem al funcţiei $f$, în alte cazuri $a$ nu este punct de extrem.

**Exerciţiul 6.6.17** Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3+3xy.$$

Rezolvare. Observăm că $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Să aflăm punctele sale critice, adică soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0. \end{cases}$$

Soluţiile sistemului sunt punctele $O(0,0)$ şi $M(-1,-1)$. Verificăm în continuare dacă aceste puncte critice sunt puncte de extrem. Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(3x^2 + 3y\right)'_x = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(3y^2 + 3x\right)'_x = 3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(3y^2 + 3x\right)'_y = 6y.$$

Pentru punctul critic $O(0,0)$ avem:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Deci

$$B^2 - AC = 9 > 0,$$

rezultă că punctul $O(0,0)$ nu este punct de extrem.
Pentru punctul critic $M(-1,-1)$ avem:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 3,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -6.$$

Deci

$$B^2 - AC = 9 - 36 = -27 < 0.$$

Cum $A < 0$, rezultă că punctul $M(-1,-1)$ este punct de maxim local. Valoarea maximă locală este

$$f_{\max} = f(-1,-1) = 1.$$

**Exerciţiul 6.6.18** Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy > 0\right\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x+y)\, e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

<u>Rezolvare</u>. Aflăm mai întâi punctele critice, adică soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} e^{-\left(x^2+y^2\right)} - (x+y)\cdot 2x \cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0 \\ e^{-\left(x^2+y^2\right)} - (x+y)\cdot 2y \cdot e^{-\left(x^2+y^2\right)} = 0. \end{cases}$$

Soluţiile sistemului sunt punctele $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Verificăm în continuare dacă aceste puncte critice sunt puncte de extrem. Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \left(e^{-\left(x^2+y^2\right)} \cdot \left(1-2x^2-2xy\right)\right)'_x \\ &= -2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(1-2x^2-2xy\right) + e^{-\left(x^2+y^2\right)}(-4x-2y) \\ &= e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(-6x-2y+4x^3+4x^2y\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \left(e^{-\left(x^2+y^2\right)} \cdot \left(1-2xy-2y^2\right)\right)'_x \\ &= -2xe^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(1-2xy-2y^2\right) + e^{-\left(x^2+y^2\right)}(-2y) \\ &= e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(-2x+4x^2y+4xy^2-2y\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \left(e^{-\left(x^2+y^2\right)} \cdot \left(1-2xy-2y^2\right)\right)'_y \\ &= -2ye^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(1-2xy-2y^2\right) + e^{-\left(x^2+y^2\right)}(-2x-4y) \\ &= e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(-2x-6y+4xy^2+4y^3\right). \end{aligned}$$

Pentru punctul critic $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ avem

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3e^{-\frac{1}{2}},\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{2}},$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3e^{-\frac{1}{2}}.$$

Deci

$$B^2 - AC = -8e^{-1} < 0.$$

Cum $A < 0$, rezultă că punctul $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este punct de maxim local.

Pentru punctul critic $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ avem

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 3e^{-\frac{1}{2}},\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}},$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 3e^{-\frac{1}{2}}.$$

Deci

$$B^2 - AC = -8e^{-1} < 0.$$

Cum $A > 0$, rezultă că punctul $Q\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ este punct de minim local.

**Exerciţiul 6.6.19** Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3.$$

Rezolvare. Aflăm punctele critice, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3x^2 = 0 \\ -2x + 2y + 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Soluţia sistemului este punctul $O(0, 0)$. Verificăm dacă acest punct critic este punct de extrem. Calculăm derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(2x - 2y + 3x^2\right)'_x = 2 + 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \left(-2x + 2y + 3y^2\right)'_x = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(-2x + 2y + 3y^2\right)'_y = 2 + 6y,$$

deci

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -2,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2.$$

Prin urmare,

$$B^2 - AC = 0$$

şi nu putem aplica teorema precedentă. Observăm că

$$f(x, y) = (x - y)^2 + x^3 + y^3 \text{ şi } f(0, 0) = 0.$$

Studiem semnul lui $f$ pentru $x$ şi $y$ în vecinătatea originii. Introducem coordonatele polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

şi obţinem

$$f(\rho,\theta) = \rho^2\left[(\cos\theta - \sin\theta)^2 + \rho\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)\right].$$

Pentru orice $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ avem $\cos\theta - \sin\theta \neq 0$. Atunci, pentru un astfel de $\theta$, există $\rho_0 > 0$ suficient de mic astfel încât oricare ar fi $\rho < \rho_0$ să avem $f(\rho,\theta) > 0$. Dar, pentru $\theta = \frac{5\pi}{4}$, avem

$$f\left(\rho, \frac{5\pi}{4}\right) = 2\rho^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 < 0.$$

În concluzie, funcţia $f$ nu are puncte de extrem.

## 6.7 Funcţii implicite

Fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de două variabile şi fie ecuaţia

$$F(x, y) = 0. \tag{6.31}$$

Ne punem problema dacă ecuaţia (6.31) poate fi rezolvată în raport cu $y$, adică dacă există o funcţie $y : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(x, y(x)) \in D$, pentru orice $x \in A$, şi $F(x, y(x)) = 0$, pentru orice $x \in A$.

**Definiţia 6.7.1** Funcţia $y = y(x)$ definită de ecuaţia (6.31) se numeşte *funcţie definită implicit* sau *funcţie implicită.*

În primul rând ne interesează în ce condiţii ecuaţia (6.31) defineşte funcţia implicită $y = y(x)$. În unele cazuri este posibil să rezolvăm ecuaţia şi să găsim $y$ explicit în funcţie de $x$. De exemplu, să considerăm ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$. Rezultă uşor că această ecuaţie are două soluţii: $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ şi $y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ pentru $x \in [-1, 1]$. Să considerăm acum ecuaţia $x^3 + y^3 = 6xy$. Această ecuaţie nu este uşor de rezolvat, iar rezultatul are o expresie complicată.

O altă problemă care ne interesează, în cazul în care ecuaţia (6.31) defineşte funcţia implicită $y = y(x)$, este: să stabilim proprietăţi ale acestei funcţii fără a efectua explicitarea, proprietăţi deduse din studiul direct al funcţiei $F$. Dacă funcţia implicită este o funcţie derivabilă, cum găsim derivata funcţiei $y$ fără să o explicităm? Să reluăm exemplul anterior.

**Exemplul 6.7.2** Fie ecuaţia

$$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Să presupunem că ecuaţia determină $y = y(x)$ funcţie implicită derivabilă. Derivăm în raport cu $x$ ambii membri ai ecuaţiei şi obţinem

$$3x^2 + 3y^2(x)\, y'(x) = 6y(x) + 6xy'(x),$$

de unde

$$y'(x) = \frac{2y(x) - x^2}{y^2(x) - 2x}.$$

Deci, pentru a găsi derivata lui $y$ nu am avut nevoie să rezolvăm ecuaţia, adică să-l găsim pe $y$ în funcţie de $x$, ci, derivând ambii membri ai ecuaţiei în funcţie de $x$, din ecuaţia rezultată l-am determinat pe $y'$.

Să presupunem acum că ecuaţia (6.31) defineşte implicit o funcţie $y = y(x)$, adică $F(x, y(x)) = 0$, pentru orice $x \in A$ ($A$ fiind domeniul de definiţie al funcţiei $y$) şi această funcţie $y$ este derivabilă pe $A$. Dacă $F$ este diferenţiabilă, putem deriva în raport cu $x$ ambii membri ai ecuaţiei (6.31) şi, aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0,$$

adică

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0.$$

Dacă $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, atunci

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Următoarea teoremă, a cărei demonstraţie o omitem, ne dă condiţii care să asigure presupunerile făcute mai sus.

**Teorema 6.7.3** (Teorema funcţiilor implicite). *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ şi punctul $(a, b) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*
(i) $F(a, b) = 0$,
(ii) $F \in C^1(D)$,
(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$,
*atunci există o vecinătate $U$ a punctului $a$ în $\mathbb{R}$, o vecinătate $V$ a punctului $b$ în $\mathbb{R}$ şi o unică funcţie $y : U \to V$ astfel încât:*
I. $F(x, y(x)) = 0$, *pentru orice* $x \in U$,
II. $y$ *este diferenţiabilă pe* $U$,
III. $y(a) = b$.

Deci, în ipotezele teoremei, ecuaţia (6.31) defineşte funcţia $y$ ca funcţie de $x$, local, în jurul punctului $a$ şi această funcţie $y$ este derivabilă. În plus, derivata funcţiei implicite $y$ se calculează după formula:

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}, \text{ pentru orice } x \in U_1, \tag{6.32}$$

unde $U_1 = \left\{x \in U; \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0\right\}$.

**Exerciţiul 6.7.4** Arătaţi că ecuaţia

$$x^5 + y^5 + xy = 3$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ o funcţie implicită $y = y(x)$ derivabilă. Să se calculeze $y'(1)$.
*Rezolvare*. Considerăm funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x, y) = x^5 + y^5 + xy - 3.$$

Observăm că funcţia $F$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$ şi $F(1, 1) = 0$. Obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 5x^4 + y, \ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 5y^4 + x,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deci funcţiile $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Prin urmare, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. În plus,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 6 \neq 0.$$

Conform Teoremei funcţiilor implicite, există $U$ şi $V$ vecinătăţi ale punctului 1 şi o unică funcţie $y : U \to V$ derivabilă pe $U$ astfel încât $y(1) = 1$ şi $F(x, y(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$.
Să calculăm în continuare $y'(1)$. Folosind formula (6.32) obţinem

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{5x^4 + y(x)}{5y^4(x) + x},\ x \in U_1,$$

deci

$$y'(1) = -1.$$

Sau, pentru a calcula $y'(1)$, derivăm în raport cu $x$ egalitatea

$$F(x, y(x)) = 0,\ x \in U,$$

echivalentă cu

$$x^5 + y^5(x) + xy(x) - 3 = 0,\ x \in U,$$

şi obţinem

$$5x^4 + 5y^4(x)\, y'(x) + y(x) + xy'(x) = 0,\ x \in U.$$

Pentru $x = 1$ avem

$$5 + 5y'(1) + 1 + y'(1) = 0,$$

adică

$$y'(1) = -1.$$

**Exerciţiul 6.7.5** Arătaţi că ecuaţia

$$y \sin x + x^3 + y^3 = 1$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ o funcţie implicită $y = y(x)$ derivabilă. Să se calculeze $y'(0)$.
*Rezolvare*. Considerăm funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x, y) = y \sin x + x^3 + y^3 - 1.$$

Avem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = y \cos x + 3x^2,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \sin x + 3y^2,$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, deci $F \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. În punctul $(a,b) = (0,1)$ avem $F(0,1) = 0$ şi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0.$$

Conform Teoremei funcţiilor implicite, există $U$ vecinătate a lui 0, $V$ vecinătate a lui 1 şi o unică funcţie $y : U \to V$ derivabilă pe $U$ astfel încât $y(0) = 1$ şi $F(x, y(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$. În plus,

$$y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{y(x)\cos x + 3x^2}{\sin x + 3y^2(x)},\ x \in U_1,$$

rezultă că

$$y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

Aceste rezultate pot fi obţinute derivând în raport cu $x$ egalitatea

$$F(x, y(x)) = 0,\ x \in U,$$

adică

$$y(x)\sin x + x^3 + y^3(x) - 1 = 0,\ x \in U.$$

Prin această derivare obţinem

$$y'(x)\sin x + y(x)\cos x + 3x^2 + 3y^2(x)\, y'(x) = 0,\ x \in U,$$

de unde rezultă că

$$y'(x) = -\frac{y(x)\cos x + 3x^2}{\sin x + 3y^2(x)},\ x \in U_1,$$

şi

$$y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

**Observaţia 6.7.6** Să considerăm o curbă dată implicit de ecuaţia $F(x,y) = 0$ şi fie $(a,b)$ un punct de pe curbă. Să presupunem că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 6.7.3. Rezultă că pe o vecinătate a punctului $(a,b)$ graficul curbei coincide cu graficul funcţiei $y = y(x)$ dată de teoremă. Funcţia $y$ fiind derivabilă în $a$, curba admite tangentă în punctul $(a,b)$ a cărei pantă este tocmai $y'(a)$. Prin urmare, ecuaţia tangentei este

$$y - b = y'(a)(x - a)$$

şi folosind formula (6.32) , ecuaţia devine

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0.$$

**Observaţia 6.7.7** În ipoteze similare celor din teorema anterioară, o ecuaţie în care apar mai mult decât două variabile,

$$F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0,$$

poate defini o funcţie implicită de mai multe variabile

$$y=y(x_1,x_2,...,x_n).$$

Presupunem acum că $z=z(x,y)$ este o funcţie dată implicit de ecuaţia

$$F(x,y,z)=0,$$

unde $F:D\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Înseamnă că $F(x,y,z(x,y))=0$, pentru orice $(x,y)$ din domeniul de definiţie al funcţiei $z$. Dacă $F$ şi $z$ sunt diferenţiabile, atunci derivăm ecuaţia $F(x,y,z(x,y))=0$ în raport cu $x$ şi obţinem

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Cum $\dfrac{\partial x}{\partial x}=1$ şi $\dfrac{\partial y}{\partial x}=0$, rezultă că

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

Dacă $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y)\neq 0$, atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}. \tag{6.33}$$

Similar, derivând ecuaţia $F(x,y,z(x,y))=0$ în raport cu $y$ obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}. \tag{6.34}$$

**Exerciţiul 6.7.8** Arătaţi că ecuaţia

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$$

determină în mod unic într-o vecinătate a punctului $(1, -2, 1)$ o funcţie implicită $z = z(x, y)$ şi să se găsească $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ în punctul $(1, -2)$.

__*Rezolvare*__. Considerăm funcţia $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $F$. Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y + x,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 6z - 1.$$

Prin urmare, funcţiile $F$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci $F \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. În punctul $(1, -2, 1)$ avem

$$F(1, -2, 1) = 0 \text{ şi } \frac{\partial F}{\partial z}(1, -2, 1) = 5 \neq 0.$$

Atunci există $U \subset \mathbb{R}^2$ vecinătate pentru $(1, -2)$, $V \subset \mathbb{R}$ vecinătate pentru 1 şi o unică funcţie $z : U \to V$, $z = z(x, y)$, diferenţiabilă pe $U$, astfel încât $z(1, -2) = 1$ şi $F(x, y, z(x, y)) = 0$, pentru orice $(x, y) \in U$.
Aplicând formula (6.33) obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{2x + y}{6z(x, y) - 1},$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0.$$

Aplicând formula (6.34) obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{4y + x}{6z(x, y) - 1},$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = \frac{7}{5}.$$

**Exercişiul 6.7.9** Să se arate că funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

$a, b \in \mathbb{R}$ fixaţi, $\Phi \in C^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, verifică relaţia

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + b \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 1.$$

*Rezolvare*. Notăm $F(x, y, z) = \Phi(x - az, y - bz)$ şi $u = x - az$, $v = y - bz$. Astfel avem

$$\Phi(u(x, y), v(x, y)) = 0.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, cu ajutorul formulelor (6.33) şi (6.34). Pentru aceasta, determinăm mai întâi derivatele parţiale ale funcţiei $F$ folosind regula de derivare a unei funcţii compuse. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} - b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

Atunci,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{a \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + b \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}$$

şi

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}{a \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + b \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}}.$$

Se obţine uşor că $a \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y) + b \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 1$.

**Exerciţiul 6.7.10** Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^z.$$

<u>*Rezolvare*</u>. Derivând ecuaţia în raport cu $x$ obţinem

$$2x + 2z\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right) = e^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right),$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right) = \frac{2x}{e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)}.$$

Derivând ecuaţia dată în raport cu $y$ obţinem

$$2y + 2z\left(x,y\right)\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right) = e^{z(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right),$$

de unde rezultă că

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right) = \frac{2y}{e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)}.$$

Atunci,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(x,y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(x,y\right) = \left(\frac{2x}{e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)}\right)'_x$$

$$= \frac{2\left(e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)\right) - 2x\left(e^{z(x,y)}\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right) - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right)\right)}{\left(e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)\right)^2 - 4x^2\left(e^{z(x,y)} - 2\right)}{\left(e^{z(x,y)} - 2z\left(x,y\right)\right)^3}.$$

Similar se găsesc şi celelalte derivate parţiale de ordinul al doilea.

De asemenea, putem întâlni funcţii definite implicit de un sistem de ecuaţii de tipul

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m\right) = 0 \\ F_2\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m\right) = 0 \\ \vdots \\ F_m\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m\right) = 0, \end{cases} \tag{6.35}$$

unde $F_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$. Vom considera $x_1, x_2, ..., x_n$ variabile independente, iar $y_1, y_2, ..., y_n$ depind de $x_1, x_2, ..., x_n$. În această situaţie spunem că funcţiile $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, ..., m$, sunt *funcţii implicite* definite de sistemul $(6.35)$. Determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

se numeşte *determinantul funcţional* sau *iacobianul* funcţiilor $F_1, F_2, ..., F_m$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, ..., y_m$.

**Observaţia 6.7.11** Existenţa unei soluţii locale a sistemului (6.35) este asigurată de îndeplinirea următoarelor condiţii:
(i) $F_1, F_2, ..., F_m \in C^1(D)$;
(ii) într-un punct $(a, b) \in D$ să avem $F_i(a, b) = 0$, $i = 1, ..., m$;
(iii) $\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}(a, b) \neq 0$.
În plus, funcţiile $y_i = y_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ sunt diferenţiabile pe domeniul lor de definiţie (o vecinătate a punctului $a$).

**Exerciţiul 6.7.12** Arătaţi că sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

defineşte într-o vecinătate a punctului $(1, 1, -1)$ funcţiile implicite $y = y(x)$ şi $z = z(x)$. Calculaţi $y'$ şi $z'$ în punctul 1.
*Rezolvare*. Considerăm funcţiile $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 1,$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

Evident, $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$, fiind funcţii polinomiale. În punctul $(a, b) = (1, 1, -1)$ avem

$$F_1(1, 1, -1) = 0 \text{ şi } F_2(1, 1, -1) = 0.$$

Calculăm determinantul funcţional:

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(z - y).$$

Prin urmare, valoarea determinantului funcţional în punctul $(1, 1, -1)$ este

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(1, 1, -1) = -4 \neq 0.$$

Atunci, există $U$ vecinătate pentru 1, $V$ vecinătate pentru $(1,-1)$ şi perechea de funcţii $(y,z) : U \to V$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, cu $y(1) = 1$, $z(1) = -1$. Funcţiile $y$ şi $z$ sunt derivabile şi verifică sistemul

$$\begin{cases} x + y(x) + z(x) - 1 = 0 \\ x^2 + y^2(x) + z^2(x) - 3 = 0. \end{cases}$$

Pentru a calcula $y'$ şi $z'$ derivăm ambele ecuaţii ale acestui sistem. Obţinem

$$\begin{cases} 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \\ 2x + 2y(x)\, y'(x) + 2z(x)\, z'(x) = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y'(x) + z'(x) = -1 \\ 2y(x)\, y'(x) + 2z(x)\, z'(x) = -2x. \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem şi obţinem

$$y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2x & 2z(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y(x) & 2z(x) \end{vmatrix}} = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)},$$

$$z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2y(x) & -2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y(x) & 2z(x) \end{vmatrix}} = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)}.$$

Deci,

$$y'(1) = \frac{1 - z(1)}{z(1) - y(1)} = -1 \text{ şi } z'(1) = \frac{y(1) - 1}{z(1) - y(1)} = 0.$$

**Exerciţiul 6.7.13** Să se calculeze diferenţialele $du$ şi $dv$ ale funcţiilor $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$, definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} e^u + u \sin v = x \\ e^u - u \cos v = y. \end{cases}$$

*Rezolvare*. În acest caz, $x$ şi $y$ sunt variabile independente. Derivăm mai întâi ecuaţiile sistemului dat în raport cu $x$ şi obţinem

$$\begin{cases} e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin v + u \cos v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos v + u \sin v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} (e^u + \sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\cos v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 \\ (e^u - \cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\sin v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem liniar în necunoscutele $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ şi obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{1 + e^u(\sin v - \cos v)}$$

şi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u(1 + e^u \sin v - e^u \cos v)}.$$

Derivăm în continuare sistemul dat în raport cu variabila $y$ şi obţinem

$$\begin{cases} e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin v + u\cos v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ e^u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos v + u\sin v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

Soluţia sistemului este

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{1 + e^u(\sin v - \cos v)}$$

şi

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u(1 + e^u \sin v - e^u \cos v)}.$$

Deci, diferenţiala $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ are expresia

$$du = \frac{\sin v}{1 + e^u(\sin v - \cos v)}dx + \frac{-\cos v}{1 + e^u(\sin v - \cos v)}dy$$

şi diferenţiala $dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$ are expresia

$$dv = \frac{\cos v - e^u}{u(1 + e^u \sin v - e^u \cos v)}dx + \frac{e^u + \sin v}{u(1 + e^u \sin v - e^u \cos v)}dy.$$

# Bibliografie

[1] G. Chiorescu, Analiză matematică. Teorie şi probleme. Calcul diferenţial, Editura PIM, Iaşi, 2006.

[2] S. Chiriţă, Probleme de matematici superioare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[3] S. O. Corduneanu, Capitole de analiză matematică, Editura Matrix, Bucureşti, 2011.

[4] A. Crăciun, I. A. Crăciun, M. Ispas, Analiză matematică, partea I, Culegere de probleme de calcul diferenţial, Editura Politehnium, 2004.

[5] B. P. Demidovici, Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

[6] G. Dumitreasa, V. Postolică, V. Ţifui, Lecţii de analiză matematică, Piatra Neamţ, 1992.

[7] P. Georgescu, Elemente de calcul diferenţial pe dreapta reală, Editura Matrix Rom, 2012.

[8] N. Gheorghiu, T. Precupanu, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[9] R. Gologan, V. Iftode, G. Păltineanu, M. Olteanu, A. Toma, T.-L. Costache, J. Crînganu, M. Roman, M. Burlică, V. Kecs, Calcul diferenţial şi integral, Editura StudIS, Iaşi, 2013.

[10] R. Luca-Tudorache, Analiză matematică, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.

[11] Manual de matematică pentru clasa a XI-a. Elemente de analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[12] M. Nicolescu, N. Roşculeţ, S. Marcus, Analiză matematică, vol. I (Ediţia a IV-a), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

[13] N. Papaghiuc, C. Călin, Algebră liniară şi geometrie , Editura Performantica, Iaşi, 2003.

[14] A. Precupanu, Bazele analizei matematice, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[15] R. Strugariu, Analiză matematică. Calcul diferenţial, Editura Performantica, Iaşi, 2013.

[16] H. Tudor, Analiză matematică; curs practic pentru ingineri, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2006.

[17] M. D. Weir , J. R. Hass, F. R. Giordano, Thomas' Calculus including Second-order Differential Equations, Pearson, 2006.